Jelöljük V_n-nel az $1, 2, \dots, n$ egységnyi pálcákból előállítható háromszögek számát, és ezek között legyen S_k azoknak a száma, amelyekben a leghosszabb pálca k egységnyi. Ekkor

$$V_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = S_3 + S_4 + \dots + S_n, \tag{1}$$

hiszen $S_n = S_2 = 0$ (bár S_3 értéke is 0, de a későbbiek szempontjából ezt a tagot mégis kiírjuk).

Jelöljük egy tetszőleges háromszögben, amelyben a leghosszabb oldal k egységnyi, a másik két oldal hosszát a-val, b-vel úgy, hogy

$$k > a > b \geq 1. \tag{2}$$

Tehát a, b természetes számok, melyekre a háromszög-egyenlőtlenségnek megfelelően

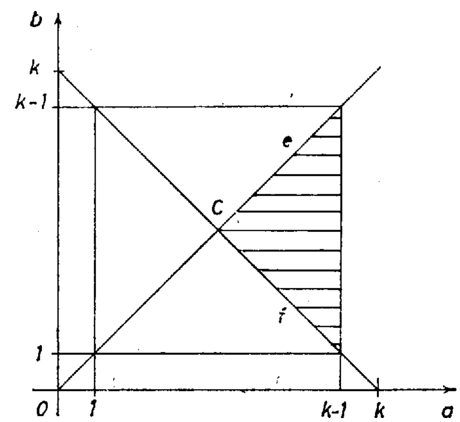
$$a + b > k. \tag{3}$$

Ha az a, b természetes számokra (2) és (3) teljesül, akkor van olyan háromszög, melynek oldalai a, b és k egységnyiek, hiszen a másik két oldalra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség (2) miatt triviálisan teljesül. Ezek szerint S_k egyenlő a (2) – (3) egyenlőtlenségrendszerre a természetes számok körében adható megoldások számával.

Ha az a, b számpárokat a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, a megfelelő pontok az

$$1 \leq a < k, \qquad 1 \leq b < k$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott N_k négyzetben vannak, az $a = b$ feltételnek megfelelő e egyenes alatt és az $a+b = k$ feltételnek megfelelő f egyenestől jobbra. S_k a síknak ebben a részében található, egész koordinátájú pontjainak (rácspontjainak) száma.



Az N_k négyzet oldalain $(k-1)$ egész koordinátájú pont van, így N_k-ban $(k-1)^2$ a rácspontok száma. Ebből le kell vonnunk az e és f egyeneseken levő rácspontok számát, ezeken külön-külön ugyancsak $(k-1)$ rácspont található. Ha azonban az e és f egyenesek metszéspontjának koordinátái egészek, ezt a pontot kétszer számítanánk. A C metszéspont mindkét koordinátája, $k/2$, ezek tehát akkor egészek, ha k páros. Ezek szerint ha N_k-ból elhagyjuk az e, f egyenesek pontjait, a visszamaradó rácspontok száma

$$(k-1)^2 - 2(k-1) + \lambda_k = (k-2)^2 - \mu_k,$$

ahol $\lambda_k = 1$, ha k páros, és $\lambda_k = 0$, ha k páratlan, és $\mu_k = 1 - \lambda_k$. Az N_k négyzetet az e, f egyenesek négy egybevágó részre vágják, melyekben a rácspontok száma is egyenlő, hiszen tetszőleges rácspontot ezekre az egyenesekre tükrözve ismét rácspontot kapunk. Ezek alapján

$$S_k = \frac{1}{4}\left((k-2)^2 - \mu_k\right). \tag{4}$$

Ha mármost n páratlan, akkor (1)-re tekintettel

$$4V_n = \sum_{k=3}^{n} (k-2)^2 - \sum_{k=3}^{n} \mu_k,$$

ahol a második összeg a 3 és n közti páratlan számok száma, hiszen $\mu_k = 1$ ha k páratlan, és $\mu_k = 0$ ha k páros. Így ez a második összeg $(n-1)$ felével egyenlő és

$$4V_n = \sum_{k=1}^{n-2} k^2 - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6} - \frac{n-1}{2} =$$

$$= \frac{n-1}{6}(2n^2 - 7n + 3) = \frac{(n-1)(n-3)(2n-1)}{6}.$$

Vagyis páratlan n esetén

$$V_n = \frac{(n-1)(n-3)(2n-1)}{24}.$$

Ha pedig n páros, akkor ezt és (4)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} V_n = V_{n+1} - S_{n+1} &= \frac{n(n-2)(2n+1)}{24} - \frac{(n-1)^2-1}{4} = \\ &= \frac{n(n-2)(2n+1)}{24} - \frac{n(n-2)}{4} = \frac{n(n-2)(2n-5)}{24}. \end{aligned}$$

A két kifejezést egyesíthetjük. Ugyanis a két számláló beszorzással

$$2n^3 - 9n^2 + 10n - 3, \qquad \text{ill.} \qquad 2n^3 - 9n^2 + 10n,$$

így minden n-re ($n \geq 3$) az egész rész jelének felhasználásával

$$V_n = \left[\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}\right].$$

Göndőcs Ferenc, Füredi Zoltán