I. megoldás. A feladatban szereplő műveletet egyszerűség kedvéért szorzásnak nevezzük – természetesen erről a szorzásról nem használhatjuk fel a valós számok körében megszokott tulajdonságokat, csak azokat, amelyeket a feladat biztosít. Látni fogjuk, hogy ez a szorzás például nem kommutatív, lesz ugyanis olyan X, Y elempár, melyre $X \bigcirc Y$ nem egyenlő $Y \bigcirc X$-szel. Emiatt az elsőre azt mondjuk, hogy X-et jobbról szorozzuk Y-nal, a másodikra, hogy balról.

	E	A	B	C	D	F	G	H
E	E	A	B	C	D	F	G	H
A	A			E		G		D
B	B			A				
C	C							
D	D	H	G	F				
F	F			G				
G	G			H	E			
H	H					E		B

1.ábra

	E	A	B	C	D	F	G	H
E	E	A	B	C	D	F	G	H
A	A	B	C	E	F	G	H	D
B	B	C	E	A	G	H	D	F
C	C	E	A	B	H	D	F	G
D	D	H	G	F	B	A	E	C
F	F	D	H	G	C	B	A	E
G	G	F	D	H	E	C	B	A
H	H	G	F	D	A	E	C	B

5.ábra

A táblázatból leolvasható, hogy bármely elemet az E elemmel akár jobbról, akár balról megszorozva magát az illető elemet kapjuk, az E tehát úgy viselkedik, mint a számok körében az 1-es; emiatt *egység-elemnek* nevezzük.

A (III) tulajdonság szerint bármely X elemhez van olyan Y elem, mellyel akár jobbról, akár balról megszorozva az egységet kapjuk, – ezt az Y elemet a továbbiakban az X *inverz*ének nevezzük és X'-vel jelöljük. Megmutatjuk, hogy minden elemnek csak egy inverze van. Legyen ugyanis X egy tetszőleges elem, és Y_1 is, Y_2 is ennek inverze, vagyis

$$X \bigcirc Y_1 = Y_1 \bigcirc X = X \bigcirc Y_2 = Y_2 \bigcirc X = E, \text{ ekkor}$$
$$Y_1 = Y_1 \bigcirc E = Y_1 \bigcirc (X \bigcirc Y_2) = (Y_1 \bigcirc X) \bigcirc Y_2 = E \bigcirc Y_2 = Y_2,$$

tehát Y_1 és Y_2 egyenlőek, állításunkat bebizonyítottuk. (Bizonyítás közben felhasználtuk a II tulajdonságot.) Ha az X elem inverze Y, akkor $X \bigcirc Y = Y \bigcirc X = E$, tehát egyben azt is mondhatjuk, hogy Y inverze X, vagyis bármely elem inverzének inverze maga az eredeti elem.

A táblázatból leolvasható, hogy A inverze C, G inverze D, és H inverze F. Az E inverze nyilván E, így B inverze csak B lehet. Rendezzük úgy át a táblázatot, hogy az inverz elemek egymás mellé kerüljenek, és szorzatuk az ábra főátlójában (a jobbra lejtő átlóban) legyen (2. ábra).

	E	B	$C=A'$	A	$G=D'$	D	$H=F'$	F
E	E	B	$C=A'$	A	$G=D'$	D	$H=F'$	F
B	B	E	A		D			
A	A	$C=A'$	E		F'	F	D	$G=D'$
$A'=C$	C			E	F			
D	D	$G=D'$	F	$H=F'$	E			
$D'=G$	G		$H=F'$			E		
F	F		$G=D'$				E	B
$F'=H$	H		D				B	E

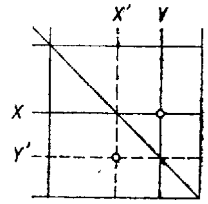
2. ábra

A B-t az E alá (mögé) tettük, így az elemeket kettesével csoportosítva a táblázatban négy vízszintes és négy függőleges sáv alakult ki.

A megadott szorzatokból újakat kapunk, ha felhasználjuk, hogy az $(X \bigcirc Y)$ szorzat inverze $Y' \bigcirc X'$, hiszen

$$(X \bigcirc Y) \bigcirc (Y' \bigcirc X') = X \bigcirc \big(Y \bigcirc (Y' \bigcirc X')\big) =$$
$$= X \bigcirc \big((Y \bigcirc Y') \bigcirc X'\big) = X \bigcirc (E \bigcirc X') = X \bigcirc X' = E$$

Táblázatunkban az $X \bigcirc Y$ elem az X jelű sor és az Y jelű oszlop találkozásánál van, az $Y' \bigcirc X'$ elem pedig ennek a helynek a főátlóra vett tükörképén, hiszen az Y' elem ugyanannyiadik sorban van, mint ahányadik oszlopban Y áll, és X' ugyanannyiadik oszlopban található, mint ahányadik sorban X áll (4. ábra).



4. ábra

Így a táblázatban megadott szorzatokat a főátlóra tükrözve, és a kapott helyre inverzüket írva, a táblázatnak több mezejét kitölthetjük. (Közben találjuk, hogy $F \bigcirc C = G$, $A \bigcirc H = D$, amint azt vártuk, tehát e két szorzatból az egyiket „feleslegesen” adta meg a feladat.)

A táblázat mostani állásából kiolvasható, hogy $F \bigcirc F = B$. Hasonló állítás igaz az A, D elemekre is: $B \bigcirc A' = A$ és $B \bigcirc D' = D$, emiatt

$$A \bigcirc A = (B \bigcirc A') \bigcirc A = B \bigcirc (A' \bigcirc A) = B \bigcirc E = B,$$
$$D \bigcirc D = (B \bigcirc D') \bigcirc D = B \bigcirc (D' \bigcirc D) = B \bigcirc E = B.$$

A szorzat inverzére tett megállapításunkból ennek alapján következik, hogy

$$A' \bigcirc A' = (A \bigcirc A)' = B' = B,$$
$$D' \bigcirc D' = (D \bigcirc D)' = B' = B,$$
$$F' \bigcirc F' = (F \bigcirc F)' = B' = B.$$

Ezek alapján könnyen kitölthetjük B sorát és oszlopát, hiszen ha X egy tetszőleges, B-től és E-től különböző elemet jelöl, akkor $X \bigcirc X = B$. Ennek alapján (3. ábra)

	E	B	A'	A	D'	D	F'	F
E	E	B	A'	A	D'	D	F'	F
B	B	E	A	A'	D	D'	F	F'
A	A	A'	E	B	F'	F	D	D'
A'	A'	A	B	E	F	F'	D'	D
D	D	D'	F	F'	E	B	A'	A
D'	D'	D	F'	F	B	E	A	A'
E	F	F'	D'	D	A	A'	E	B
F'	F'	F	D	D'	A'	A	B	E

3. ábra

$$X \bigcirc (X \bigcirc B) = (X \bigcirc X) \bigcirc B = B \bigcirc B = E,$$

tehát $X \bigcirc B$ az X inverze, és hasonló módon

$$(B \bigcirc X) \bigcirc X = B \bigcirc (X \bigcirc X) = B \bigcirc B = E,$$

tehát $B \bigcirc X$ is X inverzével egyenlő.

Mivel $B \bigcirc B = E$, a B elem részben úgy viselkedik, mint a (-1) a valós számok körében, így $B \bigcirc X = X'$ miatt X'-t „$-X$”-nek is gondolhatjuk, és azt sejtjük, hogy az előjeles számok szorzásának ismert szabálya itt is érvényes. Valóban, ha X és Y két, az E-től és B-től különböző, de egymástól nem feltétlenül különböző elem, akkor

$$X' \bigcirc Y = (B \bigcirc X) \bigcirc Y = B \bigcirc (X \bigcirc Y) = (X \bigcirc Y)',$$
$$X \bigcirc Y' = X \bigcirc (Y \bigcirc B) = (X \bigcirc Y) \bigcirc B = (X \bigcirc Y)',$$
$$X' \bigcirc Y' = (X' \bigcirc Y)' = \big((X \bigcirc Y)'\big)' = X \bigcirc Y,$$

ami annak felel meg, hogy különböző előjelűek szorzata negatív, ugyanolyan előjelűek szorzata pozitív a valós számok körében.

Elegendő tehát az A, D, F elemek közti szorzatokat meghatározni. A táblázatból leolvasható, hogy $A \bigcirc D = F$, $A \bigcirc F = D'$, $D \bigcirc A = F'$ (tehát ez a szorzás valóban nem kommutatív, hiszen $A \bigcirc D$ és $D \bigcirc A$ nem egyenlőek); a hiányzó szorzatok értéke pedig a már ismert szorzatok alapján:

$$F \bigcirc A = (A \bigcirc D) \bigcirc A = A \bigcirc (D \bigcirc A) = A \bigcirc F' = (A \bigcirc F)' = D,$$
$$D \bigcirc F = (A \bigcirc F') \bigcirc F = A \bigcirc (F' \bigcirc F) = A \bigcirc E = A,$$
$$F \bigcirc D = (A \bigcirc D) \bigcirc D = A \bigcirc (D \bigcirc D) = A \bigcirc B = A'.$$

Ezek alapján már minden hátra levő szorzat értékét meghatározhatjuk és a műveletről összefoglalva kimondhatjuk, hogy

– van egy egységelem, az E,

– van egy „előjel-elem”, a B,

– a további elemek inverz párokba állíthatók: $A' = C$, $D' = G$, $F' = H$.

Az inverz elemeket is tartalmazó szorzatokra érvényes az ismert „előjelszabály”,

	E	B	$C = A'$	A	$G = D'$	D	$H = F'$	F
E	E	B	$C = A'$	A	$G = D'$	D	$H = F'$	F
B	B	E	A		D			
A	A	$C = A'$	E		F'	F	D	$G = D'$
$A' = C$	C			E	F			
D	D	$G = D'$	F	$H = F'$	E			
$D' = G$	G		$H = F'$			E		
F	F		$G = D'$				E	B
$F' = H$	H		D				B	E

2. ábra

	E	B	A'	A	D'	D	F'	F
E	E	B	A'	A	D'	D	F'	F
B	B	E	A	A'	D	D'	F	F'
A	A	A'	E	B	F'	F	D	D'
A'	A'	A	B	E	F	F'	D'	D
D	D	D'	F	F'	E	B	A'	A
D'	D'	D	F'	F	B	E	A	A'
E	F	F'	D'	D	A	A'	E	B
F'	F'	F	D	D'	A'	A	B	E

3. ábra

– az A, D, F elemek közül két egymás utáninak a szorzata ciklikusan mindig a harmadik: $A \bigcirc D = F$, $D \bigcirc F = A$, $F \bigcirc A = D$, a fordított sorrendben pedig a harmadik elem inverzét kapjuk: $D \bigcirc A = F'$, $F \bigcirc D = A'$, $A \bigcirc F = D'$.

Ennek a műveletnek nyilván megvan az (I), (III) tulajdonsága, azt viszont még meg kell mutatnunk, hogy (II) is mindig teljesül, azaz

$$(X \bigcirc Y) \bigcirc Z = X \bigcirc (Y \bigcirc Z).$$

Ez nyilván teljesül, ha az elemek közül az egyik E, hiszen ekkor mindkét oldalon a másik két elem szorzata áll. Ha mindhárom elem B, mindkét oldalon B áll, ha csak kettő egyenlő B-vel, akkor mindkét oldalon a harmadik elem áll, ha pedig egy egyenlő B-vel, akkor mindkét oldalon a másik két elem szorzatának az inverze áll. Azt kell még megvizsgálnunk, amikor az X, Y, Z elemek különböznek E-től és B-től.

Ha az X, Y, Z elemeket csak az A, D, F elemek közül választjuk, elegendő azt az esetet vizsgálnunk, amikor $X = A$, hiszen az $A \to D$, $D \to F$, $F \to \to A$ megfeleltetés művelettartó ezekre az elemekre. Így 9 hármasszorzatot kell kétféleképpen kiszámítanunk:

$$\begin{aligned}
&A \bigcirc (A \bigcirc A) = A \bigcirc B = A', && (A \bigcirc A) \bigcirc A = B \bigcirc A = A',\\
&A \bigcirc (A \bigcirc D) = A \bigcirc F = D', && (A \bigcirc A) \bigcirc D = B \bigcirc D = D',\\
&A \bigcirc (A \bigcirc F) = A \bigcirc D' = F', && (A \bigcirc A) \bigcirc F = B \bigcirc F = F',\\
&A \bigcirc (D \bigcirc A) = A \bigcirc F' = D, && (A \bigcirc D) \bigcirc A = F \bigcirc A = D,\\
&A \bigcirc (D \bigcirc D) = A \bigcirc B = A', && (A \bigcirc D) \bigcirc D = F \bigcirc D = A',\\
&A \bigcirc (D \bigcirc F) = A \bigcirc A = B, && (A \bigcirc D) \bigcirc F = F \bigcirc F = B,\\
&A \bigcirc (F \bigcirc A) = A \bigcirc D = F', && (A \bigcirc F) \bigcirc A = D' \bigcirc A = F,\\
&A \bigcirc (F \bigcirc D) = A \bigcirc A' = E, && (A \bigcirc F) \bigcirc D = D' \bigcirc D = E,\\
&A \bigcirc (F \bigcirc F) = A \bigcirc B = A', && (A \bigcirc F) \bigcirc F = D' \bigcirc F = A'.
\end{aligned}$$

Ha az X, Y, Z elemek között az A, D, F elemek inverze is előfordul, az „előjelszabály” alapján mindkét oldalon meghatározhatjuk az eredményt úgy, hogy először elhagyjuk az inverzet jelölő vesszőket, meghatározzuk a szorzatot, majd aszerint, hogy páros vagy páratlan számú vesszőt hagytunk el, a kapott eredményt változatlanul hagyjuk, vagy vesszük az inverzét. – Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

II. megoldás *(csak a táblázat kitöltésére).* Bebizonyítjuk a következő segédtételt: az (I)–(III) tulajdonságokból következik, hogy elemeink mindegyike a táblázat minden egyes sorában, oszlopában föllép. Ebből tovább az következik, hogy minden sorban, oszlopban egyszer lép föl, hiszen a sorok, oszlopok száma egyezik az elemek számával. (Az eredetileg beírt adatok nem mondanak ellent állításunknak.)

U-val és V-vel egy-egy tetszés szerinti elemet jelölve (lehetnek egyezők is), ezt fogjuk bizonyítani: létezik olyan X és olyan Y elem, amelyre

$$X \bigcirc U = V, \quad \text{ill.} \quad U \bigcirc Y = V, \tag{1}$$

vagyis, hogy a V elem az U oszlopban is és az U sorban is előfordul. Használjuk az I. megoldásban bevezetett beszédmódot és az inverz elem fogalmát is.

Megkeressük U-nak U' inverzét, továbbá a $V \bigcirc U'$ és az $U' \bigcirc V$ szorzatot, amelyek (I) szerint léteznek. Ekkor a következő két szorzás – (II)-t is fölhasználva – megadja állításunk bizonyítását:

$$(V \bigcirc U') \bigcirc U = V \bigcirc (U' \bigcirc U) = V \bigcirc E = V,$$
$$U \bigcirc (U' \bigcirc V) = (U \bigcirc U') \bigcirc V = E \bigcirc V = V.$$

Ezzel megadtuk az (1)-nek eleget tevő elemet:

$$X = V \bigcirc U', \quad \text{ill.} \quad Y = U' \bigcirc V,$$

más szóval: megoldottuk az (1) egyenleteket. Fölhasználtuk azt is, hogy a táblázat teljesen kitöltött 1. sora és 1. oszlopa elemről elemre egyezik a fejrovattal (az oszlopok, sorok jelző betűjével), más szóval azt, hogy E-vel bármelyik elemet akár balról, akár jobbról szorozva, magát az elemet kapjuk.

Segédtételünk alapján beírhatjuk C oszlopának két üres helyére a benne még nem szereplő B és D elemeket, közülük ugyanis az utolsó sorbeli mezőre csak D írható, hiszen az utolsó sorban már van B bejegyzés, ennélfogva B-t a $C \bigcirc C$ szorzat eredményének írjuk be (5. ábra, az 1. ábra mellett).

Annak a két ténynek az alapján, hogy C oszlopa immár teljes, és hogy C-nek önmagával való szorzata – röviden: „négyzete” – egyenlő B-vel, jelképesen $C^2 = B$, kitölthetjük B teljes oszlopát, C-vel való kétszeri szorzás útján, az

$$X \bigcirc B = X \bigcirc (C \bigcirc C) = (X \bigcirc C) \bigcirc C$$

azonosság fölhasználásával, hiszen az utolsó alak céljára minden X-hez kiolvashatjuk $(X \bigcirc C) = Y$, majd minden adódó Y-hoz $(Y \bigcirc C)$ „értékét”. Példaképpen előbb a B oszlop már meglevő két bejegyzését ellenőrizzük:

$$E \bigcirc B (\text{ azaz } X = E) \text{ céljára: } \; E \bigcirc C = C \quad \text{és} \quad C \bigcirc C = B,$$
$$D \bigcirc B (\text{ azaz } X = D) \text{ céljára: } \; D \bigcirc C = F \quad \text{és} \quad F \bigcirc C = G,$$

ez a két adat tehát megegyezésben van – nincs ellentmondásban – az eddig fölhasználtakkal. Hasonlóan $X = A$ mellett $A \bigcirc C = E$ és $E \bigcirc C = C$, tehát $A \bigcirc B = C$; az oszlop további hiányzó elemei pedig rendre E, A, H, D, F, egymástól és az előbbiektől különbözők, az oszlop önmagában ellentmondástalan. (A segédtétel szerinti, valamint az eddigi bejegyzésekhez viszonyított ellentmondástalanságot a továbbiakban nem mondjuk ki, bár természetesen ellenőrizzük, hiszen ellentmondás föllépése hiábavalónak mutatná a további munkát.)

Most már a B oszlop teljes voltát is fölhasználva, hasonlóan kitölthetjük $B \bigcirc C = A$ oszlopát, a vele jobbról való szorzást is két szorzásra felbontva:

$$X \bigcirc A = X \bigcirc (B \bigcirc C) = (X \bigcirc B) \bigcirc C,$$

a hiányzó betűk rendre B, C, E; D, F, G.

Eddigi fogásunk nem használható további teljes oszlopok kitöltéséhez, mert az eddig kitöltött oszlopokhoz tartozó A, B, C elemek, valamint az eleve teljes oszlopú E közül bármelyik kettőnek bármelyik sorrendben vett szorzata sem ad „új” elemet, szemléletesen mondva: a táblázat bal felső negyedében nem fordul elő D, F, G, H egyike sem.

Kitölthetjük viszont az A sor még üres két mezejét, a sor még nem használt szorzatai és az eddigiek alapján:

$$A \bigcirc D = A \bigcirc (H \bigcirc C) = (A \bigcirc H) \bigcirc C = D \bigcirc C = F,$$
$$A \bigcirc G = A \bigcirc (F \bigcirc C) = (A \bigcirc F) \bigcirc C = G \bigcirc C = H.$$

Ezekre támaszkodva B, majd C sora válik teljessé

$$B \bigcirc X = (A \bigcirc A) \bigcirc X = A \bigcirc (A \bigcirc X) \text{ és}$$
$$C \bigcirc X = (A \bigcirc B) \bigcirc X = A \bigcirc (B \bigcirc X)$$

alapján – most jobbról bal felé haladva a kiszámításban – a sor végén G, H, D, F, ill. H, D, F, G bejegyzésekkel.

Hasonlóan H sorában

$$H \bigcirc D = H \bigcirc (H \bigcirc C) = (H \bigcirc H) \bigcirc C = B \bigcirc C = A \text{ és}$$
$$H \bigcirc G = H \bigcirc (F \bigcirc C) = (H \bigcirc F) \bigcirc C = E \bigcirc C = C,$$

végül e sor és a következő azonosságok alapján rendre G, F, D sorát tesszük teljessé:

$$G \bigcirc X = (H \bigcirc A) \bigcirc X = H \bigcirc (A \bigcirc X),$$
$$F \bigcirc X = (G \bigcirc A) \bigcirc X = G \bigcirc (A \bigcirc X) \text{ és}$$
$$D \bigcirc X = (F \bigcirc A) \bigcirc X = F \bigcirc (A \bigcirc X)$$

(könnyítésül megjegyezzük, hogy a jobb oldal szerinti, időben első szorzás mindháromban ugyanaz).

Selényi Péter és *Göndőcs Ferenc*
megoldásainak felhasználásával