I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy minden n esetére az a_n-nél nagyobb b_n számot kapunk, ha a közös 2 alap fölé mindenütt nagyobb kitevőt írunk. Legyen b_n kifejezésében a kitevő az a_n beli

$$(1)\qquad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad n-1,\quad n$$

helyén rendre a következő:

$$(2)\qquad 2^0+1,\quad 2^1+1,\quad 2^2+1,\quad \ldots,\quad 2^{n-1}+1,\quad 2^n+2$$

(vagyis az utolsó kitevő második tagja 2, az előbbieké 1), tehát

$$b_n=\sqrt{2^{2^0+1}+\sqrt{2^{2^1+1}+\ldots+\sqrt{2^{2^{n-1}+1}+\sqrt{2^{2^n+2}}}}},$$

és

$$a_n<b_n.$$

A kapott b_n számok közös értéke viszon $\sqrt{8}$ ez tehát az a_n számoknak egy közös korlátja. Valóban, a legbelső, az $(n+1)$-edik négyzetgyök egyenlő a közvetlen előtte álló taggal, hiszen a gyök alatti kitevő kétszer akkora, mint a közvetlen előtte álló tagé; így az n-edik gyökjel alatt e tag 2-szerese,

$$2^{2^{n-1}+2}$$

áll. A további gyökvonások során ugyanez ismétlődik, és még $n-1$ gyökvonást végrehajtva

$$b_n=\sqrt{2^{2^0+2}}=\sqrt{8},$$

függetlenül az n-től.

Azt kell már csak igazolnunk, hogy a (2) kitevősorozat minden egyes tagja nagyobb az (1)-beli megfelelőjénél, azaz ha $k=0,\,1,\,2,\,\ldots$, akkor

$$2^k+1>k.$$

Ez $k=0,\,1,\,2$ esetén igaz. Ha pedig valamely k-ra teljesült, akkor a következőre

$$2^{k+1}+1=2\cdot 2^k+1>2(k-1)+1=(k+1)+(k-2)\geq k+1,$$

és ezt akartuk megmutatni.

Göndőcs Ferenc

II. megoldás. Jelöljük az a_n-beli (elölről számítva) k-adik gyökjel alatti kifejezést L_k-val. Megmutatjuk, hogy $n+1\geq k\geq 3$ esetén

$$(3)\qquad L_k<2^k.$$

Ez $k=n+1$-re igaz, mert $L_{n+1}=2^n<2^{n+1}$. Ha mármost (3) teljesül egy k-ra ($k\geq 3$), akkor

$$L_{k-1}=2^{k-2}+\sqrt{L_k}\leq 2^{k-2}+2^{\frac{k}{2}}\leq 2^{k-2}+2^{k-2}=2^{k-1},$$

hacsak

$$\frac{k}{2}\leq k-2,\quad \text{azaz}\quad k-1\geq 3,$$

amint állítottuk.

Eszerint pedig

$$a_n<\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{2^3}}}<\sqrt{1+\sqrt{5}}<2,$$

amint a feladat állítja.

Papp Zoltán

III. megoldás. Az a_n számsorozat szigorúan monoton növekvő, minden egyes tagja nagyobb az előtte állónál: $a_{n+1}>a_n$, mert bennük a (kívülről számított) $n+1$-edik négyzetgyökjel alatt rendre

$$2^n+\sqrt{2^{n+1}},\quad \text{ill.}\quad 2^n$$

áll, ahol a nagyságviszony nyilvánvaló, és ebből a két számból már ugyanazokkal a lépésekkel haladunk: a_{n+1} és a_n kiszámításában és a váltakozva végzett négyzetgyökvonások és ugyanazon szám hozzáadásai ezt a nagyságviszonyt változatlanul hagyják. Eszerint ha $n>1$, akkor $a_n>a_1=1$.

Megmutatjuk másrészt, hogy

$$a_{n+1} < \sqrt{1+\sqrt{2}a_n}.$$

Szorozzuk meg evégett a_n-et $\sqrt{2}$-vel a következő módon. Az első gyökjel alatti tagokat 2-vel, de a második tag, a négyzetgyök alá vigyük be a szorzót, ott tehát 2-nek már a négyzetével szorzunk, hasonlóan a harmadik gyökjel alatt a $2 \cdot 2 = 4$-ik hatványával, és így tovább, az $(n+1)$-edik négyzetgyökjel alatt már 2^{2^n} lesz a szorzó. Ezáltal $\sqrt{1+\sqrt{2}a_n}$-nek $(n+2)$ gyökjelet tartalmazó kifejezése:

$$\sqrt{1+\sqrt{2\cdot 1+\sqrt{2^2\cdot 2+\sqrt{2^{2^2}\cdot 2^2+\ldots+\sqrt{2^{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}+\sqrt{2^{2^n}\cdot 2^n}}}}}},$$

vagyis a $(k+2)$-edik gyökjel alatti első tag $(k+2 \geq 2)$:

$$2^{2^k}\cdot 2^k = 2^{k+2^k}.$$

Ezzel szemben a_{n+1}-nek a $(k+2)$-edik gyökjele alatti első tag a definíció szerint

$$2^{k+1},$$

és mivel a kitevők között nyilvánvalóan fennáll a

$$k+2^k > k+1$$

egyenlőtlenség, ha $k>0$, azért valóban

$$\sqrt{1+\sqrt{2}a_n} > a_{n+1},$$

és a_n monoton növekedése alapján

$$\sqrt{1+\sqrt{2}a_n} > a_n.$$

Innen négyzetreemeléssel (hiszen $a_n > 0$), átrendezéssel

$$a_n - \frac{1}{a_n} < \sqrt{2}.$$

Végül mivel $a_n > 1$, és így

$$0 < \frac{1}{a_n} < 1, \quad \text{azért}$$

$$a_n - 1 < a_n - \frac{1}{a_n} < 2,$$

tehát

$$a_n < 1+\sqrt{2}.$$

(A most kapott felső korlát nagyságra nézve az I. és II megoldásban kapottak között áll.)

Földvári Csongor