1. Bebizonyítjuk a következő segédtételt: két adott, közös pont nélküli, zárt, konvex alakzat elválasztható egy síkkal; pontosabban: megadható hozzájuk olyan sík, hogy az általa meghatározott, nyílt félterek mindegyike az egyik – és csak az egyik – alakzatot tartalmazza.

Könnyen bizonyítható, hogy ha K_1 és K_2 két zárt, konvex alakzat, akkor létezik olyan K_1-beli P_1 és hozzá egy K_2-beli P_2 pont, hogy P_1'-vel a K_1-nek, P_2'-vel a K_2-nek egy-egy tetszőleges pontját jelölve, a $P_1'P_2'$ távolság legalább akkora, mint a P_1P_2 távolság. Ha K_1-nek és K_2-nek nincs közös pontja – mint esetünkben –, akkor $P_1P_2 = d > 0$, P_1 és P_2 különbözők. Ekkor a P_1P_2 szakasz felező merőleges síkja egy, a fentiek szerinti elválasztó sík, és elválasztja K_1-et K_2-től minden olyan S sík is, amely ezzel párhuzamos és a P_1P_2 szakaszt ennek egy belső pontjában metszi.

Az állítást az ilyen S-ekre bizonyítjuk. Előrebocsátjuk, hogy a mondottak szerint a P_1 körüli, d sugarú G gömbnek nyilvánvalóan nincs közös belső pontja K_2-vel.

Tegyük föl – állításunkkal ellentétben –, hogy K_2-nek van az S-sel közös P_2^* pontja. Ez nem azonos P_2-vel, mert P_2 nincs rajta S-en. Így a $P_2P_2^*$ szakasz minden pontja beletartozik K_2-be, mert K_2 konvex. Van tehát e szakasznak – és vele K_2-nek is – a G belsejébe eső P_2^{**} pontja, bárhol van is P_2^* az S-en, ugyanis P_2-től P_2^* felé indulva közeledünk S-hez, belépünk G-be, hiszen G-nek P_2-beli érintősíkja párhuzamos S-sel. Így pedig $P_1P_2^{**} < P_1P_2$, ami ellentmondás; K_2-nek nincs tehát pontja S-en.

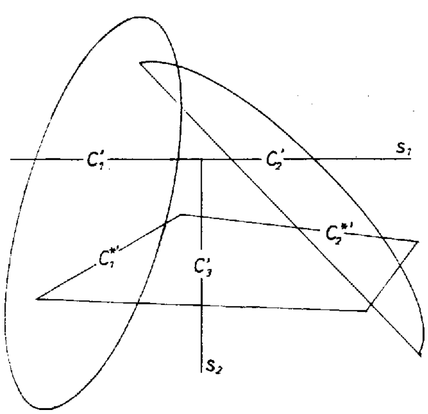
Nem lehet pontja K_2-nek a P_1-et tartalmazó féltérben sem, mert ha volna, akkor az ezt P_2-vel összekötő szakasz átdöfné S-et, és a szakasszal együtt a döféspont is K_2-be tartoznék, aminek lehetetlen voltát már beláttuk. – Az indexek fölcserélésével K_1-re is érvényes állításunk.

2. A feladat feltevése nem zárja ki, hogy a három test közül csak kettőt választva, ezeknek legyen közös pontja.

3. Segédtételünk alapján könnyű belátni a feladat állítását arra az esetre, ha van a három konvex test között olyan kettő, melyeknek nincs közös pontja. Ugyanis ezt a két testet véve az előbbi K_1 és K_2 szerepére, továbbá vetítési iránynak egy S-beli egyenes irányát, végül egy az irányhoz hajló (azaz hegyes vagy derékszöget bezáró) síkot, e síkon mindhárom test vetülete létrejön, és az első két vetületnek nem lesz közös pontja. Valóban, így S vetülete egyenes, a félterek vetületei nem nyúlnak egymásba, ugyanígy K_1 és K_2-éi sem, ekkor pedig a három vetületnek sem lehet közös pontja.

4. Ha pedig nincs a három test: C_1, C_2 és C_3 közt a fenti K_1 és K_2 szerepére alkalmas pár – vagyis bármelyik kettőnek van közös pontja, akkor a 3. pont meggondolását először a C_1 és C_2 testek közös C_{12} részére alkalmazzuk. Ez feltevésünk szerint nem üres, továbbá nyilvánvalóan zárt és konvex, végül a feladat föltevése szerint nincs közös pontja C_3-mal, van tehát olyan S_1 sík a segédtétel szerint, amely elválasztja C_{12}-t C_3-tól.

Ekkor a C_3-at tartalmazó zárt féltérben C_1-nek is, C_2-nek is van része, e C_1^*, C_2^* részeknek azonban nincs közös része, továbbá nyilvánvalóan mindkét rész zárt és konvex. Így megadható egy őket szétválasztó S_2 sík (minket azonban ennek csak az a félsíkja érdekel, amely a C_3-at tartalmazó féltérben van). Ekkor S_2-nek S_1-gyel való metszésvonala alkalmas vetítési irány. Valóban, így S_1 vetülete egy s_1 egyenes, S_2 mondott félsíkjának vetülete egy s_2 félegyenes és ezek úgy vágják szét a vetítési síkot, hogy C_3 vetülete s_1-nek egyik oldalán van, és s_2 elválasztja C_1^* és C_2^* vetületét.



A mondott vetítési irány egyértelműen létezik, mert S_2 sem azonos, sem párhuzamos nem lehet S_1-gyel, hiszen S_1-en van C_1^*-beli pont is, C_2^*-beli is, és ezek szétválasztására sem maga S_1 nem alkalmas, sem egy vele párhuzamos sík. Ezzel a bizonyítást befejeztük.