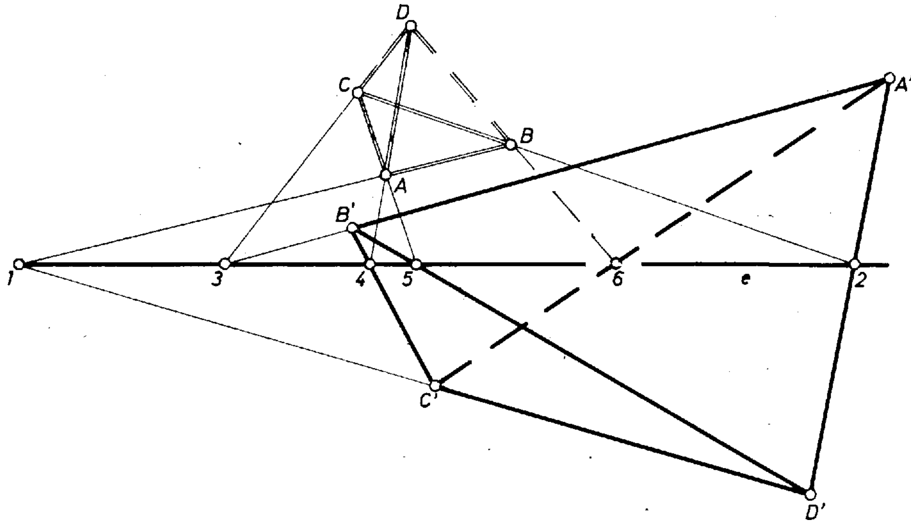
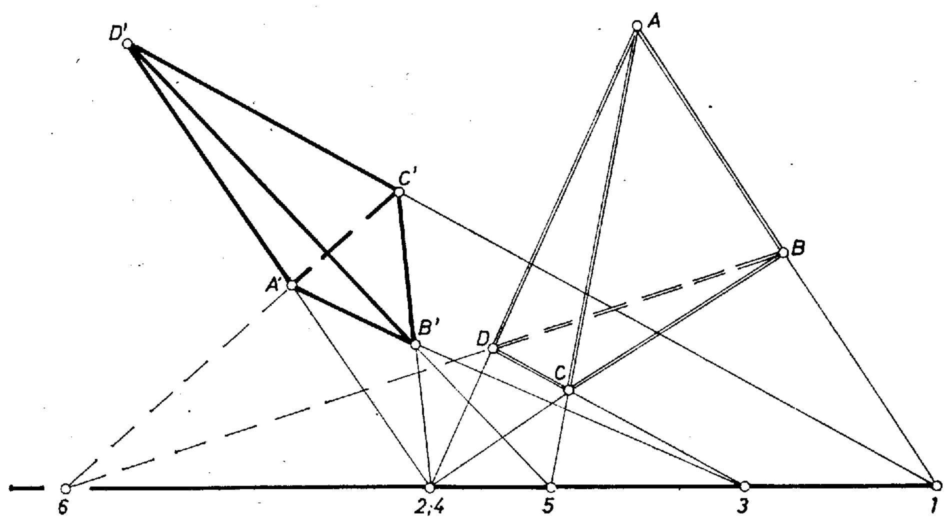
Az 1 – 3. ábrák különböző fölvételekben mutatják be a feladat föltevéseit és állítását.



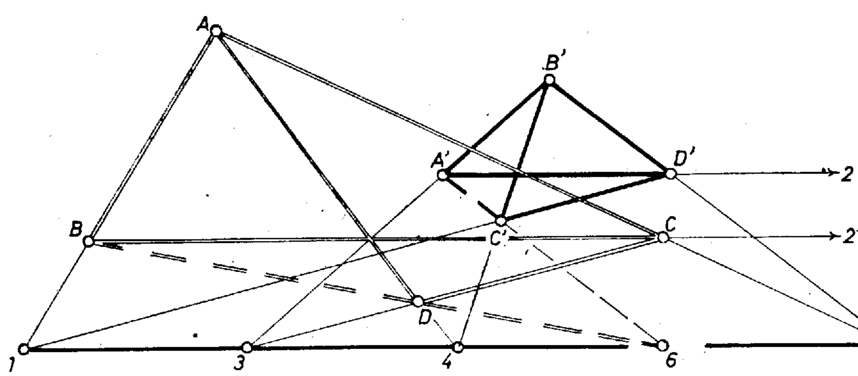
1. ábra

Megjegyezzük, hogy konvexség nincs föltételezve a négyszögekről. így az „oldal” „átló” nevek használatának nincs helye; e természetesen át is haladhat a négyszögeken.



2. ábra

A speciális fölvételű 2. ábrán az (1)-beli második és negyedik metszéspont egybeesik; a 3. ábrán pedig BC és $A'D'$ az e-vel párhuzamosak, ekkor is igaznak mutatja az állítást a szemlélet.

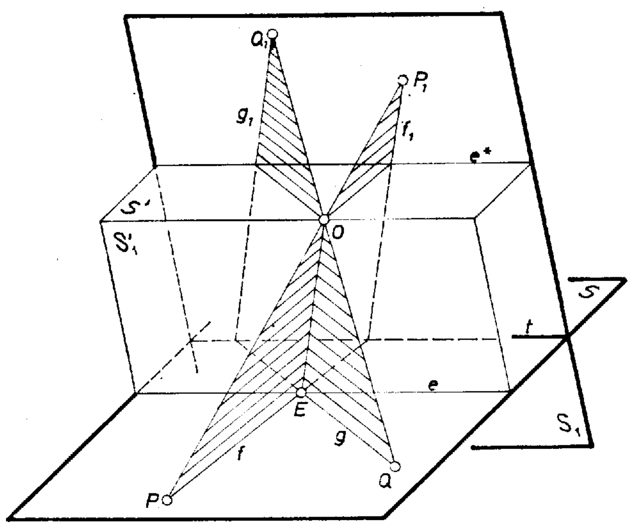


3. ábra

– Belátjuk viszont mindjárt most, hogy négyszögeinknek – amennyiben nem elfajult négyszögek – magán az e egyenesen nem lehet rajta egy szögpontjuk sem. Ha ugyanis pl. A volna rajta az e-n - vagyis az (1)-ben háromszor szereplő pontok egyike –, akkor itt metszené e-t az AB, AC, AD egyenes és ezek révén a $C'D'$ és $B'D'$, végül a $B'C'$ egyenes is, így C', D' és B' vagy egy egyenesen volnának, vagy egybe is esnének A-val, vagyis az $A'B'C'D'$ négyszög mindenképpen elfajult volna. Ha pedig B volna e-n – vagyis az (1)-ben csak kétszer szereplő pontok egyike –, akkor itt metszené e-t BA és $C'D'$, valamint BC és $D'A'$, tehát hasonlóan D' azonos volna B-vel, márpedig D' az (1)-ben azonos szerepű A-val, tehát ez sem lehetséges. (Ha valamelyik négyszögnek két szögpontja volna rajta e-n, akkor az (1) metszések közül a megfelelő határozatlan lenne.)

2. A bizonyítás céljára térbeli centrális vetítéssel a két négyszög és az e egyenes alakzatáról olyan képet állítunk elő, egy, az eredeti síkot metsző síkon, amelyben az (1) egyenespárok elemei páronként párhuzamosak. Ezután bebizonyítjuk, hogy a kérdéses BD, $A'C'$ egyenesek képei is párhuzamosak. Ebből az eredményből az állítás igaz voltát a vetítés tulajdonságai alapján fogjuk kikövetkeztetni.

Legyen O egy, az alakzatunk S síkján kívül álló pont és S_1 egy, az O és e által meghatározott S_1' síkkal párhuzamos, de attól különböző, rögzített sík. Egy S-beli P pont P_1 képét az OP egyenes (a vetítő sugár) S_1-en lévő döféspontjaként értelmezzük (4. ábra).



4. ábra

P_1 akkor és csak akkor nem létezik, ha P rajta van e-n (ekkor OP párhuzamos S_1-gyel); különben P_1 egyértelműen létrejön. – Fordítva, P_1 képe P, és S_1 minden Q_1 pontjának S-beli képe egyértelműen az QQ_1 egyenes által kimetszett Q pont, kivéve annak az e^* egyenesnek a pontjait, amelyet az O-n át S-sel párhuzamosan fektetett S' sík metsz ki S_1-ből, ezeknek a pontoknak nincs képe ebben a leképezésben (ekkor QQ_1 párhuzamos S-sel).

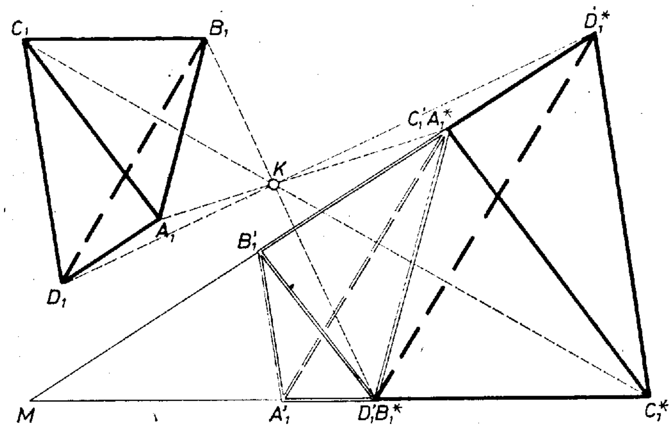
Továbbmenve, ha az S-nek f és g egyenesei az e-n levő E pontban metszik egymást, akkor f_1, g_1 képeik párhuzamosak, hiszen nyilvánvalóan át kellene menniük E képén, E-nek viszont nincs képe. (Másképpen: f és g vetítősíkjai az OE egyenesben metszik egymást, ez párhuzamos S_1-gyel, tehát a vetítősíkoknak S_1-gyel alkotott metszésvonalai, a képek is párhuzamosak. Egyébként f és f_1 az S-nek és S_1-nek t metszésvonalán metszik egymást.) Hasonlóan látható be, hogy akkor is párhuzamosak f és g képei, ha mindkettő párhuzamos e-vel, és különböző tőle; ekkor f_1 és g_1 párhuzamosak t-vel ($t \parallel e$).

Fordítva: ha f_1 és g_1 az S_1-ben egymással párhuzamos, de S-sel nem párhuzamos egyenesek, akkor ezek képei e-n metszik egymást, mert az O, f_1 és O, g_1 vetítősíkok metszésvonala párhuzamos S_1 -gyel, benne van S_1'-ben, tehát metszi e-t, és a metszésponton átmegy az f, ill. a g kép. Ha pedig f_1 és g_1 az S_1-nek S-sel, azaz t-vel párhuzamos egyenesei, akkor ezek S-beli f és g képe párhuzamos egymással és e-vel.

3. A legutóbbiak, valamint a feladat föltevései és az 1. pontbeli megjegyzés szerint az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyszögek csúcsainak $A_1, B1, \ldots D_1'$ képei a végesben vannak és

$$A_1B_1 \parallel C_1'D_1';\; B_1C_1 \parallel D_1'A_1';\; C_1D_1 \parallel A_1'B_1';\; D_1A_1 \parallel B_1'C_1';\; A_1C_1 \parallel B_1'D_1' \tag{2}$$

(5. ábra).



5. ábra

Tekintsük az első kapcsolat alapján azt a hasonlósági transzformációt, mely A_1-et C_1'-be és B_1-et D_1'-be viszi át; ennek középpontja az A_1C_1' és B_1D_1' egyenesek K metszéspontja – amennyiben létezik. (Ez a nyújtás vagy zsugorítás természetesen a K-ra való tükrözést is tartalmazhatja, ilyenkor a nagyítási arányszám negatív.) Legyen C_1, D_1 képe ebben a hasonlóságban C_1^*, D_1^* (továbbá C_1' egyben A_1^* és D_1' egyben B_1^*), (2) szerint C_1^* az $A_1'D_1'$ egyenesen, D_1^* pedig a $B_1'C_1'$ egyenesen van.

Az $A_1'D_1'$ és $B_1'C_1'$ egyenesek általában metszik egymást egy M pontban. Alkalmazzuk ebben az esetben a párhuzamos szelők tételét az M csúcsú szög száraira és egyrészt a $B_1'D_1'$, $A_1^*C_1^*$ szelőkre (amelyek párhuzamosak egymással, hiszen mindkettő párhuzamos A_1C_1-gyel), másrészt az $A_1'B_1'$, $C_1^*D_1^*$ szelőkre:

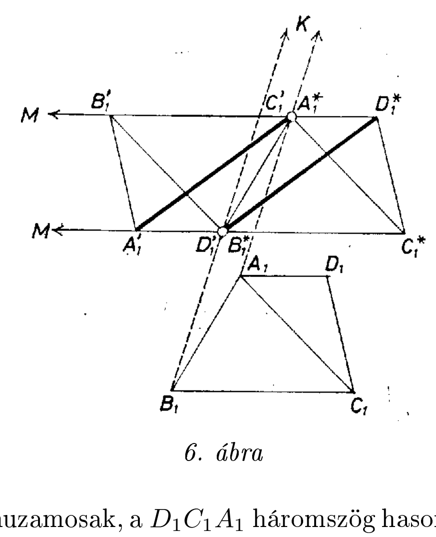
$$\frac{MB_1^*}{MB_1'}=\frac{MC_1^*}{MC_1'},\quad \text{illetve}\quad \frac{MB_1'}{MA_1'}=\frac{MD_1^*}{MC_1^*}.$$

Ezeket összeszorozva

$$\frac{MB_1^*}{MA_1'}=\frac{MD_1^*}{MC_1'},$$

ami ugyanazon tétel szerint azt jelenti, hogy a $B_1^*D_1^*$ egyenes párhuzamos az $A_1'C_1'$ egyenessel. Hasonlósági transzformációnk szerint viszont $B_1^*D_1^*\parallel B_1D_1$ tehát $B_1D_1\parallel A_1'C_1'$. Ez pedig a 2. pont utolsó megállapításai szerint a feladat állítását bizonyítja, ha B_1D_1 nem párhuzamos t-vel, akkor BD és $A'C'$ az e-n metszik egymást, ha pedig $BD\parallel t$, akkor $BD\parallel A'C'\parallel e$. (A bizonyításban (2)-nek mindegyik kapcsolatát felhasználtuk.)

Az iménti M pont csak akkor nem jön létre, ha $A_1'D_1'\parallel B_1'C_1'$ (6. ábra), azaz ha (2) szerint B_1C_1 is, D_1A_1 is párhuzamos velük.



6. ábra

Ekkor, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak, a $D_1C_1A_1$ háromszög hasonló az $A_1'B_1'D_1'$ háromszöghöz, a $D_1^*C_1^*A_1^*$ háromszög pedig egybevágó az utóbbival, hiszen az egymásnak megfelelő C_1^* ill. B_1' csúcsból induló magasságuk egyenlő. Így pedig $D_1^*A_1^*\equiv D_1^*C_1'\# D_1'A_1'\equiv B_1^*A_1'$, tehát $D_1^*C_1'A_1'B_1^*$ paralelogramma, és $A_1'C_1'\parallel B_1^*D_1^*\parallel B_1D_1$; ezzel az állítást ilyen esetre is bebizonyítottuk. (Az $A_1D_1\parallel B_1C_1$ helyzet azt jelenti, hogy S-ben AD és BC ugyanabban a pontban metszik e-t, és az egyszersmind a $B'C'$ és $A'D'$ egyeneseknek is a metszéspontja, 2. ábra.)

A felhasznált K hasonlósági középpont pedig csak akkor nem létezik, ha $A_1C_1'\parallel B_1D_1'$. Ekkor $A_1B_1D_1'C_1'$ paralelogramma, és A_1B_1 (és vele $A_1B_1C_1D_1$) transzlációval (egybevágósági transzformációval) vihető át $C_1'D_1'$-be (ill. $A_1'B_1'C_1'D_1'$ mellé; a 6. ábra egyszersmind erre is példát mutat).

4. Mindezek szerint a feladat eredeti alakzatának O-n át S_1-be vetítésével arra az esetre is bebizonyítottuk az állítást, ha az (1) egyenespárok közt van az e-vel párhuzamos pár is. (Legföljebb két ilyen pár lehet, mert pl. A, B, C és D mindegyikén át a szóban forgó $3-3$ egyenes közül csak egy lehet párhuzamos e-vel.)

Megjegyzés. A feladat állítása ekvivalens a következővel: négy pont (a síkon), melyek közül semelyik három sincs egy egyenesen, 6 egyenest határoz meg, ezek közül 5-nek egy adott (egyik adott ponton sem átmenő) egyenessel való metszéspontjai egyértelműen meghatározzák a hatodik egyenesnek az adott egyenessel való metszéspontját. Erre az állításra közvetlen bizonyítások is adhatók.