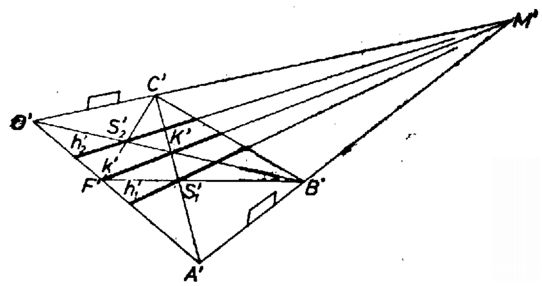
I. megoldás. Köztudomású, hogy fényképen az egy egyenesen levő, egyenlő hosszú szakaszok képei általában különböző hosszúak, ezért a kívánt osztóvonalak képeit nem rajzolhatjuk meg (a pálya oldalvonalainak képén végrehajtott) szokásos szakaszfelezés, ill. harmadolás alapján.

A fényképet – és eredetijét, a φ felvételi filmet, ami sík – centrális vetületnek tekinthetjük: egy (a felvevőgép látóterében, nyílásszögtartományában levő) P pont vetülete (képe) a lencse O középpontját vele összekötő egyenesnek, P vetítősugarának φ-vel való P' metszéspontja, hiszen a P-ből jövő és O-n átmenő fénysugár irányváltozás nélkül halad a lencsén át a filmig. (A tárgyról jövő többi fénysugár az előbbivel a képpontban egyesül, csupán a vegyi hatást erősíti.) Tovább csak centrális vetületre gondolunk, φ-t nem tekintjük határoltnak és csak azoknak a pontoknak tulajdonítunk vetületet, amelyek az O-n átmenő, φ-vel párhuzamos φ_0 sík által kettévágott térnek φ-t nem tartalmazó felében vannak; már φ_0-beli pontnak sincs vetülete.

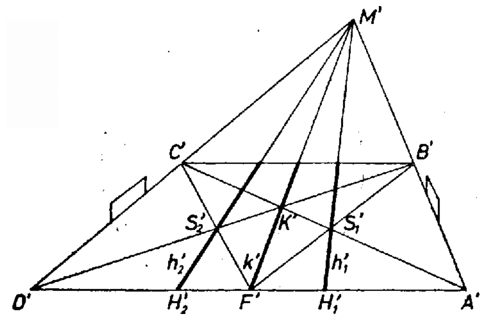
Egy, az O-n nem átmenő e egyenes vetítősíkja az O és e által meghatározott sík, ennek φ-vel való metszésvonala az e-nek e' képe, egyenes (pontosabban: csak akkor egyenes, ha $e \parallel \varphi$ és e a mondott féltérben van; különben félegyenes képe félegyenes). Az O-n átmenő egyenes képe pedig egyetlen pont.

Legyenek e_1, e_2 egymással párhuzamos, az O-n nem átmenő és a φ-t metsző egyenesek. Vetületük, e_1', ill. e_2', metszi egymást egy pontban, hiszen az O, e_1 és O, e_2 vetítősíkok metszik egymást egy, az O-n átmenő és amazokkal párhuzamos e_0 egyenesben, és ennek képén, ami egy E_0 pont, e_1' is, e_2' is átmegy. Ugyanígy minden az e_1 gyel párhuzamos egyenes vetülete átmegy E_0-on.

Ezek alapján az $ABCD$ futballpálya (téglalap) k középvonalának keresett k' képe átmegy a kapuvonalak (alapvonalak) $A'B'$, $C'D'$ képei meghosszabbításának M' metszéspontján (1–2. ábra).



1. ábra

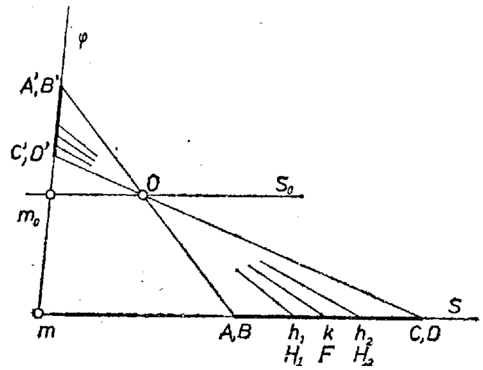


2. ábra

Másrészt k átmegy az AC, BD átlók metszéspontján, a pálya K középpontján, aminek képe az átlók képének K' metszéspontja; ennélfogva k' az $M'K'$ egyenesnek a pálya $A'B'C'D'$ képébe eső szakasza.

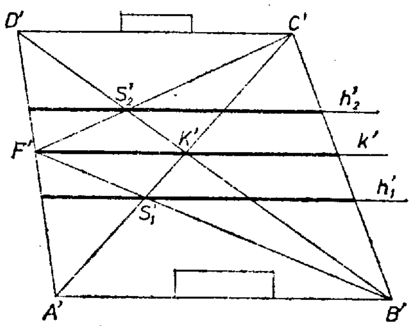
Ugyancsak M'-n megy át a h_1, h_2 harmadolóvonalak keresett h_1', h_2' képe is, egy-egy további pontjuk pedig az ADB, ill. ADC háromszög S_1, ill. S_2 súlypontjának S_1', S_2' képe, hiszen pl. S_1-nek AB-től való távolsága egyenlő az AD oldalvonal 1/3 részével. A két súlypont képét az AK, BF, ill. DK, CF súlyvonal-párok képeinek metszéspontja adja, ahol F az AD oldalvonal felezőpontja, aminek F' képét k' metszi ki $A'D'$-ből.

Szerkesztésünk csak olyan esetben nem hajtható végre, ha $A'B' \parallel C'D'$, azaz M' nem jön létre. Ez azt jelenti, hogy AB és CD vetítősíkjának metszésvonala nemcsak a pálya síkjával párhuzamos – ami mindig fennáll –, hanem φ-vel is, ennélfogva e két sík (ti. a pálya és φ) m metszésvonalával is (oldalnézetben lásd a 3. ábrán).



3. ábra

Így pedig k, h_1 és h_2 képe is párhuzamos m-mel, vagyis $A'B'$-vel. Ezért k' a K-n át, h_1', h_2' pedig a k'-ből F' útján nyert S_1'-n, S_2'-n át $A'B'$-vel párhuzamosan húzott egyenesszakasz (4. ábra).



4. ábra

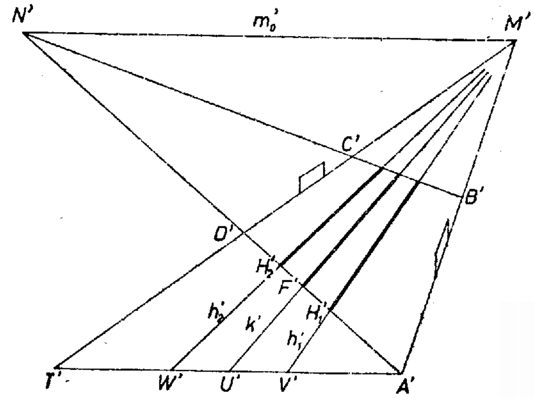
– Lehetséges az is, hogy m sem jön létre, $\varphi \parallel S$; ekkor a pálya képe téglalap, a szerkesztés valódi nagyságban (torzulások nélkül) elvégezhető.

Nagy Ferenc (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Feladatunkat a szakasz felosztás ismert szerkesztése *képi megfelelőjének* végrehajtásával oldjuk meg, a fentiek és az alábbi észrevétel felhasználásával.

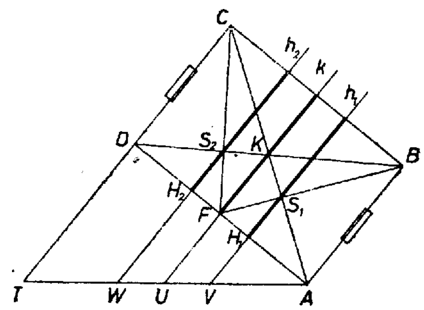
Az I. megoldás 2. ábráján $A'D' \parallel B'C'$, a pálya képe trapéz. Ebből könynyen adódik,[1] hogy $A'F' = F'D'$, és hasonlóan kaphatjuk, hogy pl. h_1'-nek $A'D'$-n levő H_1' metszéspontja harmadolja $A'D'$-t. Másrészt ekkor a 3. ábrán végzett meggondoláshoz hasonlóan $A'D'$ párhuzamos φ-nek és a pálya S síkjának m metszésvonalával. Ezek szerint *az m-mel párhuzamos egyeneseken levő, egyenlő hosszú szakaszok képe egyenlő hosszú.*

Eszerint, ha a pálya bármely fényképén pl. A'-n át párhuzamost húzunk m-mel, ennek az $A'B'$, $C'D'$ egyenesek közé eső $A'T'$ szakaszát megfelezzük és megharmadoljuk rendre az U', V', W' pontokkal (képen az 5. ábra, alaprajzban a 6. ábra), akkor k képe az $M'U'$ egyenes (ill. ennek a pálya képébe eső szakasza), h_1-é és h_2-é pedig $M'V'$, ill. $M'W'$. Valóban, ekkor T' tekinthető egy az S-ben levő T pont képének, melyre AT párhuzamos m-mel, ugyanígy U', V', W' az AT szakasz felező-, ill. harmadolópontjai képének, ekkor pedig $M'U'$, $M'V'$, $M'W'$ a rendre U-n, V-n, W-n át AB-vel párhuzamosan húzott, tehát S-ben fekvő egyenes képe, ezek az egyenesek átteszik az $AU : AT = 1 : 2$, az $AV : AT = TW : AT = 1 : 3$ arányt az AD oldalvonalra képük pedig kijelöli az osztópontokat $A'D'$-n.



5. ábra

[1] Pl. az 1244. gyakorlat segédtételével, lásd K. M. L. 39 (1969) 62. o.



6. ábra

A leírt szerkesztés céljára m irányát megadja az O-n átmenő és a pálya síkjával párhuzamos S_0 síknak φ-vel való m_0 metszésvonala (3. ábra). Ennek az S_0-nak egy pontja a fenti M', mint az O-n át AB-vel párhuzamosan húzott, vagyis az S_0-ban fekvő egyenesnek a képe, egy másik pontja pedig – ugyanezt a meggondolást az AD, BC párhuzamos egyenesekre megismételve – $A'D'$-nek és $B'C'$-nek N' metszéspontja.

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn., IV. o. t.)
Fejes Gábor (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Egyik megoldásban sem használtuk fel, hogy a futballpálya síkja vízszintes, sem azt, hogy a film síkja függőleges (különben e két tény egyike sincs biztosítva); számos dolgozat ezekre és „a perspektíva törvényeire” épült, idézésük, megokolásuk nélkül.

2. A II. megoldás módján tetszés szerinti arányt rávihetünk egy, a fényképen levő egyenesszakaszra (hacsak a képen megvan egy rajta átmenő sík két párhuzamos egyenespárjának képe). Az I. megoldás szerint csak olyan $m:n$ arányú osztást végezhetünk, melyre m/n racionális szám, és ismert egy, a szakaszt metsző párhuzamos egyenespár képe; ehhez is esetenként bonyolult meggondolás szükséges.

3. Érkezett olyan dolgozat is, amely azt használta fel, hogy egy-egy „szemben álló” kapufa talppontját összekötő egyenes párhuzamos az oldalvonalakkal, és e 2 egyenes a pályát 3 téglalapra osztja fel. A fentiekben a kapukat csak a kapuvonalak és oldalvonalak *megkülönböztetésére* használtuk fel.