a) Feladatunk első részét általánosabban oldjuk meg: azt tesszük fel, hogy a kör kerületét 6 n egyenlő részre osztjuk; ekkor a feladatban mondott eljárást $n = 30$ mellett kapjuk. Mérjük a kerület pontpárjainak távolságát az általuk meghatározott (kisebbik) körív hosszával, és válasszuk egységnek a kerület 6 n-ed részét. Egy választott háromszög nyilván akkor szokványos, ha csúcsainak távolsága legalább n.

Mivel minden ponthármast egyenlő valószínűséggel választunk, a kérdezett valószínűség a választható szokványos háromszögek és az összes választható háromszög számának a hányadosával egyenlő. Számláljuk össze a háromszögeket úgy, hogy csúcsaikat egymás után határozzuk meg. Így minden háromszöget (választhatót is, szokványosat is) 6-szor számolunk, hiszen 3 csúcsát 6 sorrendben határozhatjuk meg, a keresett hányados értéke tehát változatlan marad. Összesen $6n(6n-1)(6n-2)$ háromszöget kapunk, hiszen az első csúcs a 6 n osztópont bármelyike lehet, és a másodikat, harmadikat a visszamaradó $6n-1$, illetve $6n-2$ osztópont közül választhatjuk.

Egy szokványos háromszög első csúcsát ugyancsak 6 n-féleképpen választhatjuk meg. Jelöljük a választott osztópontot A_0-lal, és ebből kiindulva pozitív forgásirányban a további osztópontokat jelölje rendre $A_1, A_2, \ldots, A_{6n-1}$. Mivel a második csúcsot az elsőtől legalább n távolságra kell választanunk, azt csak az $A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{5n}$, osztópontok közül választhatjuk. Tegyük fel, hogy második csúcsnak A_k-t választottuk, ahol tehát $n \leq k \leq 5n$, és válasszuk a harmadik csúcsot a pozitív forgásirány szerint A_k után, de A_0 előtt. A harmadik csúcsnak A_k-tól is, A_0-tól is legalább n távolságra kell lennie, ilyen pont csak akkor van, ha A_k-tól pozitív forgás szerint A_0 legalább $2n$ távolságra van, vagyis $k \leq 4n$. Ha ez teljesül, akkor a harmadik csúcsot az

$$A_{k+n}, \qquad A_{k+n+1}, \ \ldots, \qquad A_{5n}$$

osztópontok közül választhatjuk, ami e csúcs választására

$$5n-(k+n-1) = 4n-k+1$$

lehetőséget jelent. k lehetséges értékeit is figyelembe véve, ha a 3. csúcsot a 2. után választjuk, e két csúcs választására

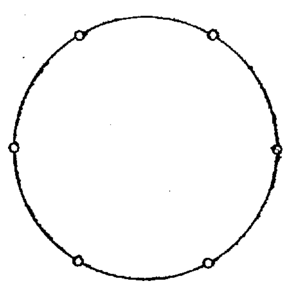
$$\sum_{k=n}^{4n}(4n-k+1) = \sum_{j=1}^{3n+1} j = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$$

lehetőségünk van, ha azt akarjuk, hogy a kapott háromszög szokványos legyen. Nyilván ugyanennyi a lehetőségek száma, ha a 3. csúcsot a 2. csúcs előtt választjuk, az összes kiválasztás száma tehát (figyelembe véve az első csúcs választását is) $6n(3n+1)(3n+2)$.

Ezek szerint szokványos háromszög választásának valószínűsége

$$p_n = \frac{6n(3n+1)(3n+2)}{6n(6n-1)(6n-2)} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{(6n-1)(6n-2)},$$

Ennek értéke $n = 1$ mellett 1, ami közvetlenül is látható: ha a csúcsokat egy szabályos hatszög csúcsai közül választjuk (1. ábra), akkor minden háromszög szokványos.



1. ábra

n értékét növelve p_n értéke monoton csökken, és $n = 30$ mellett

$$p_{30} = \frac{91 \cdot 92}{179 \cdot 178} = 0{,}263.$$

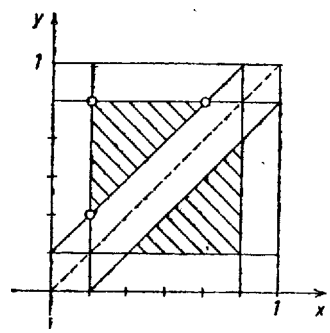
b) Tegyük fel ismét, hogy a csúcsokat egymás után választjuk meg. Az első csúcs választásának még semmi hatása nincs a kialakuló háromszög alakjára, tegyük fel, hogy ezt már megválasztottuk a kör kerületén. Az, hogy a második csúcsot tetszőlegesen választjuk a kerületen, pontosabban azt jelenti, hogy ha kijelölünk egy ívet a kerületen, akkor annak a valószínűsége, hogy a második csúcsot a mondott íven választjuk, arányos az ív hosszával. Válasszuk egységnyinek a kör kerületét, és határozzuk meg a második csúcs helyzetét az első csúcstól pozitív forgásirányban mért távolságával, jelöljük azt az értéket x-szel. x értékét tehát 0 és 1 között választjuk „tetszőlegesen", amit az előbb megfogalmazott módon mondhatunk pontosabban. Hasonlóan választhatjuk a harmadik csúcsot is, ennek helyét a 0 és 1 közötti y számmal fogjuk jellemezni.

Meg kell állapítanunk, mi a kapcsolat a két érték választása között. Azt szeretnénk, ha a két érték választása között „semmi kapcsolat” sem volna, ezt azonban nem tudjuk pontosabban megfogalmazni. Elérjük azonban, amit akarunk, ha az x, y értékeket egy P pont két koordinátájának tekintjük, és a P pontot választjuk a sík egységnégyzetében „tetszőlegesen”. Ez utóbbit ismét meg tudjuk pontosan fogalmazni: akkor választjuk P-t tetszőlegesen a négyzetben, ha annak valószínűsége, hogy P-t a négyzet valamely adott tartományában választjuk, arányos e tartomány területével. (Mivel a négyzet területe egységnyi, e valószínűség egyszerűen egyenlő a tartomány területével.)

Meg kell tehát határoznunk, az egységnégyzet melyik részén vannak azok a pontok, melyeknek szokványos háromszögek felelnek meg. Tegyük fel először, hogy $x < y$, ekkor a csúcsok közti ívek hossza, rendre x, $y - x$, $1 - y$. A háromszög akkor szokványos, ha ezek nem kisebbek a teljes kerület hatodánál, azaz

$$x \geq \frac{1}{6}, \qquad y - x \geq \frac{1}{6}, \qquad 1 - y \geq \frac{1}{6}.$$

Ezek az egyenlőtlenségek egy derékszögű háromszöget határoznak meg, csúcsainak koordinátái: $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$, és befogóinak hossza $\frac{1}{2}$ (2. ábra).



2. ábra

Az $x > y$ esetnek megfelelő tartományt az x, y szerepének felcserélésével kapjuk, ez tehát az előbbi háromszögnek az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe. E két háromszög területének összege $1/4$, ez egyben a szokványos háromszög választásának a valószínűsége is.

Megjegyzés. A kapott eredmény megegyezik az *a)* részben kapott p_n határértékével, ha n tart a végtelenbe. Ez azt mutatja, hogy helyesen adtuk meg a *b)* részben a „tetszőleges” választás pontos megfogalmazását. Pusztán e határérték meghatározását azonban nem tekinthetjük a *b)* rész megoldásának, hiszen ennél – mint láttuk – a lényeges nehézséget épp a feladat pontos megfogalmazása okozta. Ez igen gyakran előfordul a valószínűségszámítással kapcsolatos feladatoknál – és arra is könnyű példát mutatni, hogy ha a szemléletesen megfogalmazott feladatot pontosabbá akarjuk tenni, akkor erre többféle eljárás is megadható, és ezeknél a végeredmény is eltérő lehet. Feladatunkban ezt az a hallgatólagos feltevés zárta ki, hogy a *b)* részben az *a)* részhez hasonló eljárást kívántunk meghatározni.