Az adott oszlopokban álló $3-3$ szám összege valóban 8, négyzetük összege pedig köbszám:

$$\ldots,\quad 30^3,\quad 10^3,\quad 6^3,\quad 18^3,\quad 46^3,\quad \ldots$$

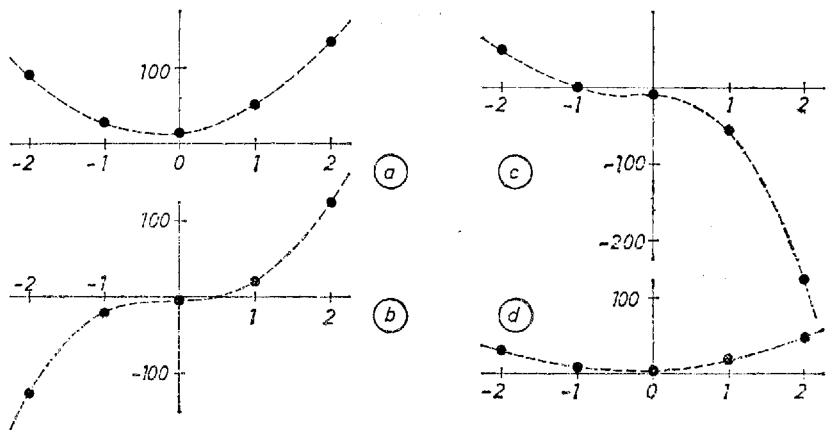
Feladatunk szerint az egyes sorok egy-egy mindkét irányban végtelen sorozat elemei, jelöljük ezeket rendre a_k, b_k, c_k-val, négyzetük összegének köbgyökét pedig d_k-val ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$). Válasszuk úgy a jelölést, hogy a $k=0$ indexnek a középső oszlop feleljen meg. Úgy akarjuk ezeket a sorozatokat meghatározni, hogy

(1) $$a_k+b_k+c_k=8,$$

(2) $$a_k^2+b_k^2+c_k^2=d_k^3$$

teljesüljön minden egész k-ra. Láttuk, hogy (1) és (2) teljesül $k=0,\ \pm1,\ \pm2$ mellett.

Tájékozódásul ábrázoljuk az adott számokat mint k függvényét.



Az a_k és d_k sorozatból kapott pontok egy-egy parabolán látszanak elhelyezkedni. Határozzuk meg ezeket a parabolákat rendre a középső három pont alapján:

$$\begin{aligned} a_k &= Ak^2+Bk+C,\\ a_{-1} &= A-B+C=26,\\ a_0 &= C=14,\\ a_1 &= A+B+C=50. \end{aligned}$$

Ezek alapján $C=14$, $A-B=12$, $A+B=36$, $A=24$, $B=12$,

(3) $$a_k=24k^2+12k+14.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

(4) $$d_k=8k^2+4k+6,$$

és a behelyettesítés mutatja, hogy (3) és (4) érvényes $k=\pm2$ mellett is.

A b_k és c_k sorozatok adott értékei inkább harmadfokú függvényre emlékeztetnek, ezeket a $k=\pm1,\ \pm2$ értékek alapján határozzuk meg:

$$\begin{aligned} b_k &= Ak^3+Bk^2+Ck+D,\\ b_{-2} &= -8A+4B-2C+D=-130,\\ b_{+2} &= 8A+4B+2C+D=126,\\ b_{-1} &= -A+B-C+D=-18,\\ b_{+1} &= A+B+C+D=14;\\ \frac{1}{2}(b_{-2}+b_2) &= 4B+D=-2,\\ \frac{1}{2}(b_{-1}+b_1) &= B+D=-2,\\ B=0;&\quad D=-2;\\ \frac{1}{4}(b_2-b_{-2}) &= 4A+C=64,\\ \frac{1}{2}(b_1-b_{-1}) &= A+C=16\\ A=16;&\quad C=O,\ \text{tehát} \end{aligned}$$

(5) $$b_k=16k^3-2$$

és ez a kihagyott $k=0$ mellett is érvényes.

c_k kifejezését hasonlóan is meghatározhatnánk, egyszerűbb azonban (1)-ből kiindulni:

$$c_k = 8 - a_k - b_k = -16k^3 - 24k^2 - 12k - 4, \tag{6}$$

hiszen (1), (3), (5) érvényes $k=0$, ±1, ±2 mellett, így az ezekből származó (6) is érvényes ezekre az értékekre.

A (3)–(6) függvények tehát előállítják a sorozat adott értékeit. Meg kell még mutatnunk, hogy a sorozatokat ezek alapján mindkét irányban folytatva (1) és (2) érvényben marad. Beláthatnánk ezt közvetlen behelyettesítéssel is, célszerűbb azonban elkerülni az ezzel járó hosszadalmas számítást. (3)–(6) alapján (1) és (2) két oldalának különbsége ugyanis k-nak harmad-, ill. hatodfokú függvénye. E két legfeljebb hatodfokú függvénynek 5 gyökhelyét már ismerjük, ezek a $k=0$, ±1, ±2 értékek, hiszen ezek mellett (1) és (2) érvényes. Ha tehát ellenőrizzük (1) és (2) teljesülését; $k=\pm3$ mellett, a különbség-polinomokról 7 helyen fogjuk tudni, hogy eltűnnek, ebből pedig már következik, hogy e polinomok azonosan 0-val egyenlőek. $k=\pm3$ mellett:

$$\begin{aligned} a_{-3} &= 194, & b_{-3} &= -434, & c_{-3} &= 248, & d_{-3} &= 66,\\ a_3 &= 266, & b_3 &= 430, & c_3 &= -688, & d_3 &= 90, \end{aligned}$$

és ezekre valóban teljesül (1) és (2). Ezzel beláttuk, hogy a (3)–(6) összefüggésekkel meghatározott sorozatokra teljesül (1) és (2).

Megjegyzések. Megoldhatjuk a feladatot a sorozatok további tulajdonságainak felismerése alapján:

1. A három sorozat egy oszlopban álló elemeit a, b, c-vel jelölve láthatjuk, hogy ezek négyzetének az összege $(a+4)/3$ köbe a felírt esetekben. Felhasználva még, mint a fenti megoldásban, hogy a felsorolt értékei rendre a $24x^2+12x+$ $+14$ polinom -2, -1, 0, 1, 2 helyen felvett értékei, továbbá az $a+b+c=8$ követelményt, ezekből b-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$2b^2 + 2(24x^2+12x+6)b + (24x^2+12x+14)^2 + \\ +(24x^2+12x+6)^2 - (8x^2+4x+6)^3 = 0.$$

Ennek diszkriminánsa x egy harmadfokú, egész együtthatós polinomjának a négyzete, és az egyenlet megoldásául is két harmadfokú, egész együtthatós polinom adódik. Könnyű látni, hogy egyik éppen a b értékeket, másik a c értékeket szolgáltatja az $x=-2$, -1, 0, 1, 2 értékekre, ami b és c szimmetrikus szerepe miatt előre látható is. Éppen a megoldásban talált kifejezésekhez jutunk, amik tehát teljesítik a feladat követelményeit minden egész x-re.

2. Az első sor egymás utáni számainak a különbsége – ún. differenciasorozata – számtani sorozatot alkot. A második és harmadik sor számaira ez nem áll, de a két differenciasorozat differenciasorozatai, az ún. második differenciasorozatok már számtani sorozatok. Ezeket a szabályosságokat a sorozatok további számaira is érvényesnek tekintve, ismét mindkét irányban tudjuk korlátlanul folytatni a sorozatokat, azonban be kell még látnunk, hogy a feladatban előírt tulajdonságok a további oszlopokra is érvényben maradnak. Nevezzük a számtani sorozatokat elsőrendű sorozatoknak, az olyanokat, amelyek differenciasorozata elsőrendű, másodrendűnek és hasonlóan tovább az olyan sorozatokat, amelyek differenciasorozata $k-1$-ed rendű, k-adrendűnek. Könnyen látható, hogy ekkor minden k-adrendű sorozat egyben magasabb rendű is; egy k-adrendű sorozatot $k+1$ egymás utáni eleme egyértelműen meghatároz, ez a $k+1$ elem viszont tetszés szerint előírható; k-adrendű sorozatok megfelelő elemeinek összegéből álló sorozat is k-adrendű, továbbá hogy egy k-adrendű és egy l-edrendű sorozat megfelelő elemeinek szorzatából álló sorozat $k+l$-edrendű sorozat.

Ezeknek a tulajdonságoknak az alapján könnyen belátható, hogy az egy oszlopbeli elemek összege továbbra is 8, és két további oszlopra is igazolva az összefüggéseket, az utoljára említett tulajdonság alapján az is belátható, hogy a négyzetösszegek sorozata hatodrendű sorozat, amelynek minden száma köbszám, egy másodrendű sorozat elemeinek a köbéből áll.

3. Belátható az is, hogy minden k-adrendű sorozat egy legföljebb k-adfokú polinom egymás utáni egész helyeken vett értékeinek a sorozata. Ez egyben mutatja a 2. megjegyzés szoros rokonságát a megoldással.

4. A megoldáskor megköveteltük a sorozatok még valamilyen tulajdonságának az öröklődését a feladatban előírtakon kívül. Nyilvánvalóan megfelelő sorozatokat kapunk pl. akkor is, ha a kapottakból tetszés szerint kihagyunk oszlopokat úgy, hogy végtelen sok még megmaradjon.