

Az azonosságot egy feladat két különböző megoldásával igazoljuk.

Tegyük fel, hogy egy dobozban m pár különböző kesztyű van. Kérdés, hányféleképpen lehet kivenni közülük $2n$ darabot. Az egyik lehetséges megoldást jól ismerjük:

$$\binom{2m}{2n},$$

ismétlés nélküli kombináció, a másik a következő.

Csoportosítsuk a lehetséges kiválasztásokat aszerint, hogy hány pár kesztyűt érintenek (akár úgy, hogy a pár mindkét darabja, akár csak egyike szerepel a kiválasztásban). Legyen az érintett párok száma k . Ezt a k párt az m pár közül $\binom{m}{k}$ -féleképpen választhatjuk ki.

Jelölje továbbá x az érintett párok között a teljes párok számát (tehát azokét, melyeknek mindkét darabját kiválasztottuk). Így a félben hagyott párok száma $k - x$. Mivel $2n$ db kesztyűt választunk ki, fennáll $2x + (k - x) = 2n$, és így a teljes párok száma $x = 2n - k$ és a páratlan kesztyűk száma $k - x = 2k - 2n$.

A k érintett pár közül a teljes párokat $\binom{k}{x} = \binom{k}{2n - k}$ -féleképpen választhatjuk ki, és ezután a $2k - 2n$ félpár mindegyikéből egymástól függetlenül választhatjuk a jobb, ill. a bal kesztyűt, vagyis 2-féleképpen választhatunk. Így ha sorban megválasztottuk az érintett párokat, majd ezek közül a teljes párokat, akkor a félpárok tekintetében minden esetben $2^{2k - 2n}$ választási lehetőségünk van.

Mivel pedig az érintett párok száma legalább n és legfeljebb $2n$, az összes lehetséges kiválasztások számát az (1) bal oldalán álló összeg is megadja. Ez szükségképpen megegyezik első megoldásunk eredményével.

Simon Júlia (Győr, Kazinczy F. Gimn., IV. o. t.)