Osztályozzuk az adott rácspontokat két koordinátájuk páros vagy páratlan volta – röviden paritása[1] – szerint. 4 osztály lehetséges: mindkét koordináta páros, csak az első páros, csak a második páros, végül egyik sem. Így legalább egy olyan osztály lesz, amelybe legalább 2 pontunk jut.

Mármost két ugyanazon osztályba sorolt rácspont közti szakasz felezőpontja ugyancsak rácspont, hiszen koordinátái rendre egyenlők a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepével, és egyező paritású számok számtani közepe egész szám. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Papp Zoltán

Megjegyzések. 1. Az állításnál valamivel többet bizonyítottunk be, ti. hogy az adott 5 rácspontból kivehető olyan pár, melyek összekötő szakaszának felezőpontja is rácspont. – Természetesen esetenként lehet olyan további pár is, melyre pl. a harmadoló pont rácspont, de a felezőpont nem.

Simon Júlia

2. Az állítás tetszőleges paralelogramma-rácsra (ferdeszögű koordináta-rendszerre) is érvényes, hiszen a felezőpont koordinátáinak megállapításában sem a koordináta-tengelyek közti szög derékszög voltát nem használtuk ki, sem azt, hogy a két tengelyen ugyanazt a szakaszt választjuk egységül.

Füredi Zoltán

3. Az állítás kiterjeszthető magasabb dimenziókra is. Nevezzük az n-dimenziós tér rácspontjainak az egész számokból álló $(a_1, \ldots, a_n)$ szám-n-eseket. Ezekből 2^n különböző osztályt alkothatunk aszerint, hogy az első, a második s i. t. az n-edik koordináta páros vagy páratlan. Ha tehát 2^n+1 rácspontot adunk meg bárhogy is, lesz kettő, mondjuk $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$, amelyek ugyanabban az osztályban vannak, vagyis amelyekre a_i és b_i ugyanolyan párosságú $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ekkor „összekötő szakaszuk felező pontja”, az $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$ pont is rácspont.

[1] Magyarul: párossága; ez az idegen szó sokkal ismertebb a közgazdaságtanban használt jelentésével.