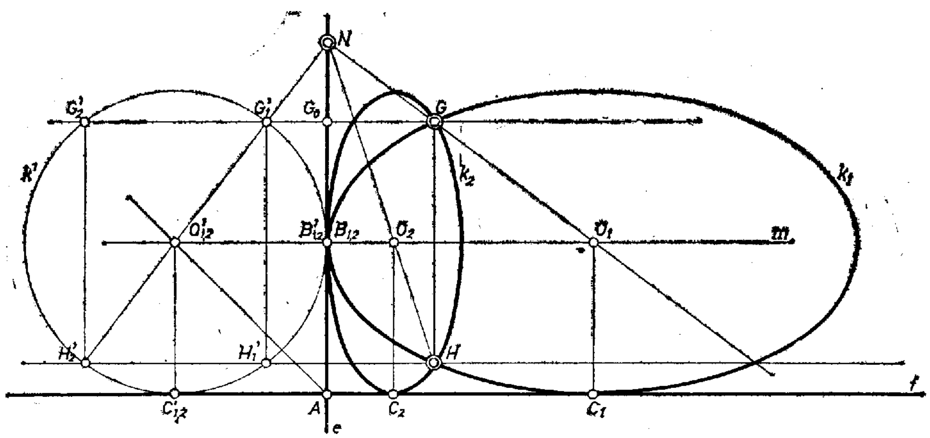
Jelölje a két egyenest e és f, metszéspontjukat A, a két adott pontot G és H, a GH egyenes metszéspontját e-vel E, f-fel F (legalább az egyikük létezik). Nyilvánvalóan csak akkor lehet szó megoldásról, ha G és H az egyenesek alkotta négy síknegyed közül ugyanabba esik, ezt tehát föltesszük. Elég megszerkesztenünk a keresett k ellipszisnek e-vel és f-fel való B, ill. C érintkezési pontját, mert ekkor O középpontja az e-re B-ben és f-re C-ben emelt merőlegesek metszéspontja, hiszen az ellipszis tengelyeinek végpontjában az érintő merőleges az illető tengelyre; a B, C, O ponthármassal k-t meghatározottnak vesszük.

Tekintsük k képét az e tengelyű merőleges affinitásokban, az affinitás λ arányszámát változtatva. Jobb áttekintés érdekében csak az e másik partján keletkező képekre szorítkozunk, azaz ha $\lambda < 0$. Így O képe az e-re merőleges egyenesen mozog és ha $-\lambda = OC/OB$, akkor k képe egy k' kör lesz, melynek sugara egyenlő OC-vel. (Értelemszerűen ugyanezek mondhatók az f tengelyű merőleges affinitásokban is k képeiről.)

Már ezek alapján könnyen célhoz érünk minden olyan esetben, ha a GH szakasz párhuzamos az adott egyenesek egyikével, mondjuk e-vel. Ilyenkor ugyanis affin képe, $G'H'$ is párhuzamos e-vel, és a kép felező merőlegese – ami azonos magának a GH szakasznak m felező merőlegesével, hiszen $G'H'$ a GH-ból f irányú alkalmas eltolással is előállítható – kimetszi e-ből B-t; továbbmenve k'-nek O' középpontját m-ből kimetszhetjük az e, f egyenespárnak azzal a szögfelezőjével, amely a G'-t tartalmazó síknegyedben halad, és így k' az O' közepű, $O'B$ sugarú kör (1. ábra).



1. ábra

k'-ból a G-nek (és H-nak is) két megfelelőjét metszi ki a rajta átmenő, e-re merőleges egyenes: G_1'-et[1] $\rightarrow$ és G_2'-t (azaz pl. $-\lambda_1 = G_1'G_0/GG_0$, ahol G_0 a G vetülete e-re), a két megoldásra tekintettel írtuk O' helyére az $O_{1,2}'$ jelet. Mármost a megfelelő két ellipszis O_1, O_2 középpontját m-en úgy kapjuk, hogy G-t, ill. H-t összekötjük a körrendszerbeli $O_1'G_1'$, ill. $O_2'H_2'$ egyenesnek e-n levő (közös) N pontjával, végül O_1, O_2 vetülete f-en C_1, ill. C_2.

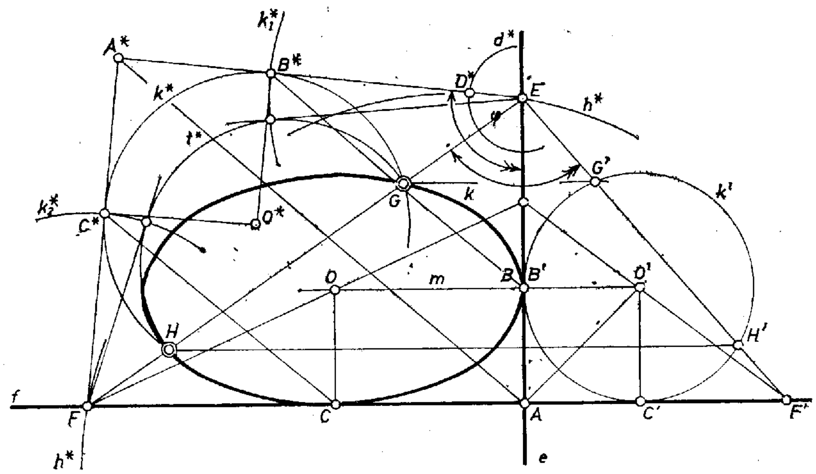
A továbbiakban föltesszük, hogy E és F mindegyike létezik, és G, H köztük levő (különböző) pontok. Ha feladatunkat úgy módosítanánk, hogy egyrészt az adott e és f helyett egy-egy az E-n, ill. F-en átmenő egyenest kelljen szerkeszteni úgy, hogy merőlegesen álljanak egymásra – ami természetesen a követelmény lazítása –, másrészt ellipszis helyett kört kelljen szerkeszteni – ami viszont megszigorítása a követelménynek –, akkor éppen a P. 39. problémával állnánk szemben.[2] Megmutatjuk, hogy feladatunk e két módosítást követve visszavezethető a P. 39-beli szerkesztésre.

Legyen G, H és F képe egy e tengelyű és k-t egy k' körbe vivő (k' az e túlsó oldalán) merőleges affinitásban rendre G', H', F'; ezek egy, az E-n átmenő egyenesen vannak, mert egyenes affin képe egyenes. Másrészt $GG' \parallel HH' \parallel FF'$, mert merőlegesek e-re, így a párhuzamos szelők tétele alapján az $EG' : EG$, az $EH' : EH$ és az $EF' : EF$ arányok egyenlők, jelöljük közös értéküket μ-vel (2. ábra).

---

[1]A logikai sorrendnek megfelelően a G_1' jelet ezúttal így célszerű kiolvasni: (nagy) gé vessző egy.

[2]Lásd a megoldást K. M. L. 40 (1970) 74. o.



2. ábra

Ez azt jelenti, hogy a mondott affinitás inverzén túl ismerünk még egy olyan transzformációt, mely az E, G', H', F' pontokat rendre E-be, G-be, H-ba, F-be viszi vissza, éspedig az a forgatva nyújtás ez, melynek középpontja E, nyújtási arányszáma μ, elfordítási szöge pedig akkora és olyan irányú, amely az EF' félegyenest EF-be viszi át. (Ez a transzformáció k' további pontjait természetesen nem a k ellipszisbe viszi át, hiszen k más pontjaira az arányok értéke nem μ). És mivel k' átmegy G'-n és H'-n, továbbá az affinitás tulajdonságai alapján érinti e-t és f-et, vagyis a hozzá E-ből, F'-ből húzott érintők merőlegesen állnak egymásra, azért k'-nek a mondott forgatva nyújtással keletkező k^* képe a G-n és H-n átmenő kör, és a hozzá E-ből és F-ből húzott érintők merőlegesek egymásra. Ezek pedig azt jelentik, hogy k^* az E, G, H, F pontok ismeretében valóban megszerkeszthető a P. 39-beli eljárás szerint. Az ábrán k^*-ra csak egy megoldást tüntettünk föl, éspedig olyat, amelyre nézve – az E-ből és F-ből húzott, egymásra merőleges EB^*, FC^* érintők metszéspontját A^*-gal jelölve – az EFA^* derékszögű háromszög körüljárása ellentétes irányú az EFA derékszögű háromszög körüljárásával. A P.39-beli t, k_1, k_2, h, d körök és D pont megfelelője rendre t^*, k_1^*, k_2^*, h^*, d^*, D^*.

Ezek után a k^*-ból k'-t előállító forgatva nyújtásnak – a fenti meggondolásbeli forgatva nyújtás inverzének – szöge és arányszáma abból adódik, hogy az EA^* szakasz EA-ba jut át. Eszerint B'-t (ami azonos B-vel) kimetszi az A^*A-val párhuzamos, B^*-on átmenő egyenes, O'-t pedig a B-n át e-re állított m merőlegesből az EAF derékszög mellékszögének felezője. F'-t kijelöli az A^*EA és FEF' forgásszögek egyenlősége (az AF szakasz A-n túli meghosszabbításán), végül az e és $F'O'$ közös pontját F-fel összekötő egyenesnek m-mel való, metszése O, és ennek f-en levő vetülete C. Így az EAF' háromszög körüljárása egyező az EA^*F háromszögével, tehát ellentétes az EAF háromszögével, amint a felhasznált affinitás kívánja.

A szerkesztés utóbbi része helyességének bizonyítását az olvasóra hagyjuk, a diszkusszió pedig természetesen azonos a P. 39-ben olvashatóval.

Megjegyzések. 1. A forgatva nyújtás és az affin leképezés eredményeképpen $FC^* : FA^* = F'C' : F'A = FC : FA$, ezért $CC^* \parallel AA^*$ ami BB^* és AA^* föl is használt párhuzamos voltával együtt azt sejteti, hogy a „csillagos” rendszer egyetlen transzformációval, ferde affinitással is átvihető a keresett ellipszis rendszerébe. Ennek teljes kivizsgálását is az érdeklődőkre hagyjuk.

2. Megoldható a feladat koordináta-geometriai számító előkészítéssel is.