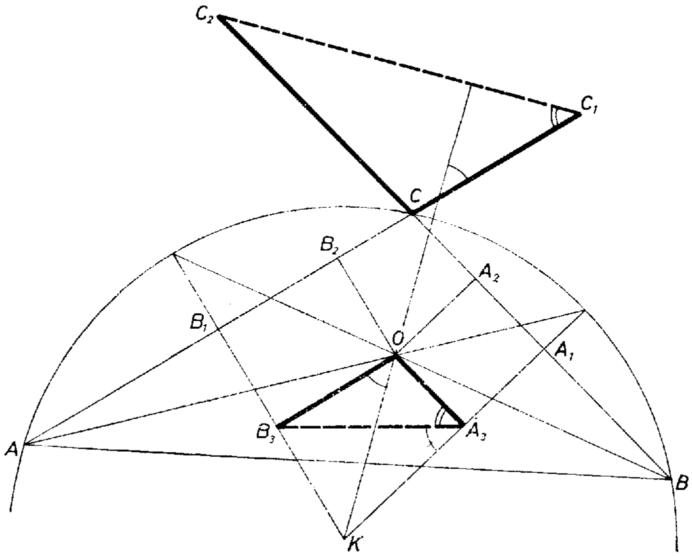
I. megoldás. Legyen az ABC háromszög köré írt kör középpontja K, a háromszögbe írt kör középpontja O, a K és O pontoknak a vetülete a BC egyenesen A_1 és A_2, az AC egyenesen B_1 és B_2. Az O-n át BC-vel párhuzamosan húzott egyenes messe A_1K-t A_3 ban, az O-n átmenő, AC-vel párhuzamos egyenesnek és B_1K-nak a metszéspontja legyen B_3.



1. ábra

A bizonyítást az 1. ábra viszonyaira fogjuk elmondani. Az A_3OB_3K négyszögben A_3-nál és B_3-nál derékszög van, ez tehát húrnégyszög. Megmutatjuk, hogy az AC egyenesnek az OK és C_1C_2 egyenesekkel alkotott szögeinek összege egyenlő az OA_3K szöggel; ezzel feladatunk állítását bebizonyítjuk, hiszen ez utóbbi derékszög.

AC és OK szöge egyenlő a B_3OK szöggel, hiszen $B_3O||AC$. A B_3OK szög egyenlő a B_3A_3K szöggel, mert A_3OB_3K húrnégyszög. Elegendő tehát megmutatni, hogy a CC_1C_2 és OA_3B_3 háromszögek hasonlóak. E két háromszög C, illetve O csúcsra támaszkodó oldalai párhuzamosak, megmutatjuk, hogy az arányuk is megegyezik. A feladat szerint $CC_1 = c - b$. Ismeretes, hogy $CA_2 = s - c$, emiatt

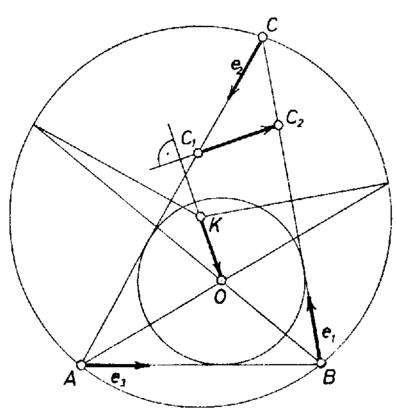
$$OA_3 = A_2A_1 = CA_1 - CA_2 = \frac{a}{2} - (s - c) = \frac{c - b}{2}.$$

Tehát $CC_1 : OA_3 = 2 : 1$, és hasonlóan kapjuk, hogy $CC_2 : OB_3 = 2 : 1$.

Megjegyzések. 1. Az O és K középpontok akkor és csak akkor esnek egybe, ha a háromszög szabályos, akkor viszont C_1 és C_2 is egybeesik. Így a feladat állítása értelmét veszti.

2. Nem nehéz megfelelően módosítani a bizonyítást az ábrán láthatótól különböző elhelyezkedés esetén sem, vagy belátni, hogy állításaink érvényesek tetszőleges háromszögre, ha az előforduló szögeket és szakaszokat irányított mennyiségeknek tekintjük. Elkerülhetjük azonban a diszkusszióval járó nehézségeket vektorok használatával is.

II. megoldás. A C_1C_2 vektor az egyenlő abszolút értékű C_1A, AB, BC_2 vektorok összegével egyenlő, e vektorok iránya pedig rendre az ABC háromszög megfelelő oldalvektorának az irányával egyezik meg.



2. ábra

Elegendő tehát megmutatni, hogy (2. ábra):

$$OK \perp (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{e}_3$ a BC, CA, AB oldalvektorokkal megegyező irányú egységvektorok. Vektorok skaláris szorzatát felhasználva ezt a következő módon láthatjuk be. Legyen az A, B, C, O pontokhoz a K centrumból húzott helyvektor rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{p}$, akkor

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a})(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0,$$
$$(\mathbf{p} - \mathbf{b})(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1) = 0,$$
$$(\mathbf{p} - \mathbf{c})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 0,$$

hiszen pl. az AO egyenes merőleges minden olyan egyenlő szárú háromszög alapjára, melynek szárai egyirányúak az AC, AB oldalakkal. Összefüggéseinket összeadva kapjuk, hogy

$$2\mathbf{p}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - [(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{e}_3 + (\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{e}_1 + (\mathbf{c} + \mathbf{a})\mathbf{e}_2] = 0.$$

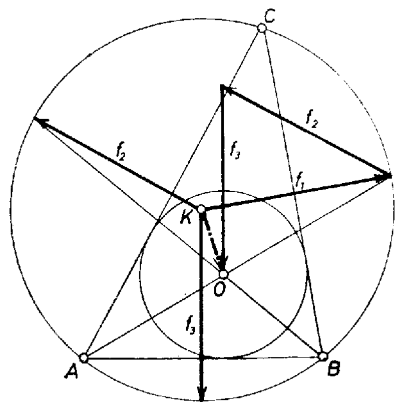
Itt a második tag 0, mert pl. az $(\mathbf{a}+\mathbf{b}))$ vektor merőleges AB-re, így $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{e}_3 = = 0$, és hasonló módon $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{e}_1 = 0$, $(\mathbf{c} + \mathbf{a})\mathbf{e}_2 = 0$. Így

$$\mathbf{p}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{e}_3) = 0,$$

amint azt bizonyítanunk kellett.

Lempert László

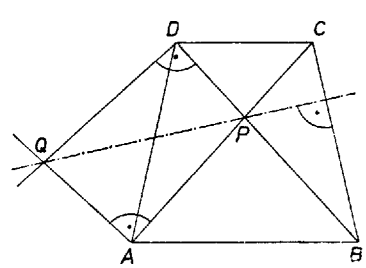
Megjegyzések. 1. Könnyen belátható a következő állítás: egységnek a háromszög köré írt kör sugarát véve, a K-ból induló és az oldalakra, merőlegesen álló három egységvektor összege éppen a $\overrightarrow{KO}$ vektor (3. ábra, a vektorok irányítása: mindegyik csúcstól a szemben levő oldal felé).



3. ábra

Ha pedig két vektor irányítását ellentétesre fordítjuk, az összegvektor végpontja a harmadik oldalhoz hozzáírt érintő kör középpontjában lesz.

2. Utóbbi megoldásunkból kiolvasható a következő egyszerű állítás bizonyítása is. Legyen $ABCD$ egyenlő szárú trapéz. Emeljünk merőlegest az AD szár végpontjaiban az oda befutó átlókra, ezek metszéspontja legyen Q, P pedig legyen az átlók metszéspontja. Akkor PQ merőleges BC-re (4. ábra).



4. ábra