I. megoldás. Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van két olyan szám: a és b, hogy sem a, sem $a+p$, sem b, sem $b+p$ nem áll elő két különböző osztálybeli szám összegeként. Jelölje a közülük a nagyobbikat. Tekintsük azt az osztályt, amelyben a 0 van. Ha akár a, akár b a másikban lenne, akkor a-nak, ill. b-nek nem volna meg a kívánt tulajdonsága (hiszen $0+a=a$, és $0+b=b$), ezért a és b a 0-t tartalmazó osztályban van.

Ugyanilyen meggondolással, ha ebben az osztályban van x, akkor ebben van $(b-x) \pmod p$ is[1] és $\{a-(b-x)\} \pmod p$ is. Ezt $x=a-b$-re alkalmazva adódik, hogy $2(a-b) \pmod p$ is a 0-t tartalmazó osztályban van. Hasonlóképpen $x=2\,(a-b) \pmod p$-re alkalmazva megint adódik, hogy $3(a-b) \pmod p$ is a 0-t tartalmazó osztályban van. Tovább folytatva azt kapjuk, hogy

$$0, \quad (a-b), \quad 2(a-b)(\bmod p), \quad 3(a-b)(\bmod p), \quad \ldots, \quad (p-1)\cdot(a-b)(\bmod p)$$

mind egy osztályban vannak.

Megmutatjuk, hogy a fenti p db szám mind különböző. Ha ugyanis valamely $0 \le k < l \le p-1$-re

$$k(a-b)(\bmod p) = l(a-b)(\bmod p)$$

lenne, akkor p osztaná a $(k-l)(a-b)$ szorzatot, ami lehetetlen, hiszen $0<|k-l|<p, \quad 0<|a-b|<p$.

Tehát a 0-t tartalmazó osztály pontosan p elemű, és így a másik osztály üres. Ellentmondásra jutottunk, így valóban csak egy megadott tulajdonságú a szám lehet.

Göndőcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)
Papp Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A feladat állítása $p=2$-re nyilvánvaló. Ezért a bizonyítás során feltesszük, hogy p páratlan. Legyen a két osztály A és B. Tekintsünk egy olyan a számot, amelyik sem maga, sem $a+p$ nem állítható elő egy A és egy B-beli szám összegeként.

Ha $0 \le x \le p-1$ és x egész, akkor egy és csakis egy $0 \le y \le p-1$ egész létezik, melyre vagy $x+y=a$, vagy $x+y=a+p$ fennáll. Minden x-hez hozzárendeljük az így adódó y-t. Így a $0,1,\ldots,p-1$ számokat sikerült párokba rendezni. Kivételt képez az az eset, amikor $x=y=\dfrac{a}{2}$, vagy $x=y=\dfrac{a+p}{2}$, ezen két eset közül rögzített a-ra csak az egyik következhet be, hiszen vagy $\dfrac{a}{2}$ vagy $\dfrac{a+p}{2}$ lesz egész. Így a párok száma $\dfrac{p-1}{2}$

A feltevés szerint az egyes pároknak azonos osztályban kell lenniük. Feltehető, hogy pl. A-ban $n_1 \le \dfrac{p-1}{2}$ pár van, és a többi szám B-ben van. Ekkor összeadva az A-beli számokat, eredményül n_1a+kp adódik, ahol $0 \le k \le n_1$. Ha volna még egy ilyen tulajdonságú $b \ne a$ szám, akkor az okoskodást megismételve az adódna, hogy az A-beli számok összege n_1b+lp, ahol ismét $0 \le l \le n_1$.

Tehát fennáll, hogy $n_1a+kp=n_1b+lp$, azaz

$$n_1(a-b)=(l-k)p.$$

Mivel $a \ne b$ és $|a-b|<p$, ha $l \ne k$, akkor kell, hogy $p|n_1$ legyen, ha pedig $l=k$, akkor $n_1=0$-nak kell fennállni. Mivel $0<n_1 \le \dfrac{p-1}{2}$, mindkét esetben ellentmondásra jutottunk.

Komjáth Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

[1] $u \pmod p$ jelentse azt a legkisebb nem negatív számot, mely p-vel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint u. Ekkor fennáll, hogy $0 \le u \pmod p \le p-1$.