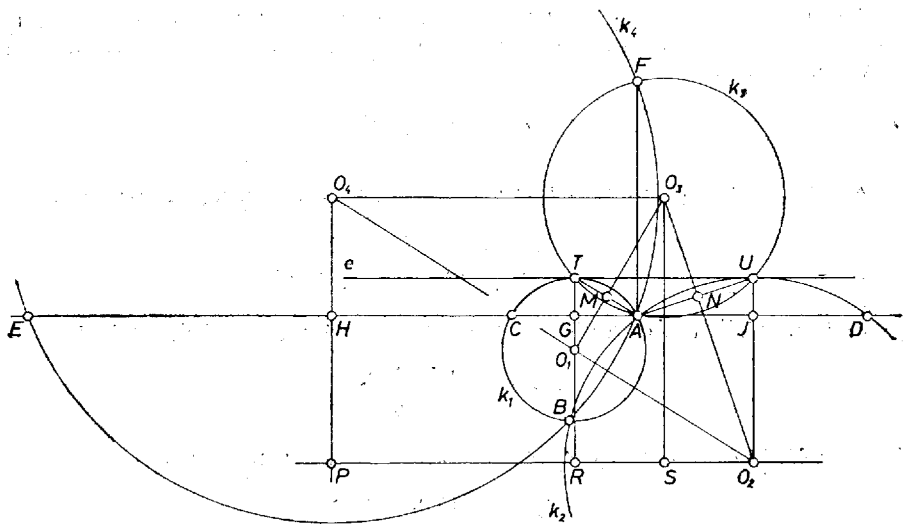
Jelöljük a kiindulási köröket k_1-gyel és k_2-vel és húzzuk meg egyik közös érintőjüket, e-t. Egyértelműség kedvéért legyen A a körök e-hez közelebbi metszéspontja. A T és U, ill. az ennek megfelelő C és D jelölést úgy válasszuk meg, hogy $CA < AD$ teljesüljön. (Ha $CA = AD$, akkor a kívánt E pont nem létezik, s így a feladat értelmét veszti.) Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy C a k_1 körön van. Ha $CA < AD$ akkor az E pont egyértelműen meghatározott, AC-nek a C-n túli meghosszabbításán van. Vezessük be még a következő jelöléseket: jelölje k_3, ill. k_4 az A, T, U pontokon, ill. az A, B, E pontokon átmenő kört, s legyen O_i a k_i kör középpontja (i=1, 2, 3, 4), J, G, H, M, N pedig rendre az AD, AC, AE, AT, AU szakasz felezőpontja. Vegyük észre, hogy O_2 távolabb van e-től, mint O_1, továbbá azt, hogy az O_1T egyenesnek két különböző oldalán van O_3 és O_4.



Az AF egyenes a k_3 és k_4 körök közös húrja, ezért merőleges a középpontjaikat összekötő egyenesre. Ezért azt bizonyítjuk, hogy az O_3O_4 egyenes párhuzamos e-vel. E célból húzzunk párhuzamost e-vel O_2-n át, s jelöljük P, R, S betűvel az O_4, O_1, O_3 pont merőleges vetületét ezen az egyenesen. Mivel O_4P és O_3S párhuzamosak, így állításunk helyességéhez elegendő egyenlőségüket bizonyítani. A következőkben ezt fogjuk megtenni.

Mindenekelőtt állapítsuk meg a következőket:

$$PO_2 = HJ = \frac{1}{2}ED \tag{1}$$

és

$$RO_2 = GJ = \frac{1}{2}CD = 2SO_2. \tag{2}$$

Az O_3SO_2 háromszög és AJU háromszög hasonlóak, hiszen az S-nél, ill. J-nél levő szögeik derékszögek, míg az O_3-nál és A-nál levő szögek merőleges szárú szögek. Így

$$O_3S = O_2S \cdot \frac{AJ}{UJ}. \tag{3}$$

Az AJU háromszög és O_2NU háromszög ugyancsak hasonlóak, így

$$O_2U = \frac{NU \cdot AU}{UJ} = \frac{AU^2}{2 \cdot UJ}. \tag{4}$$

Ugyanígy az O_4PO_2 háromszög és O_1RO_2 háromszög hasonlósága miatt

$$O_4P = \frac{O_1R \cdot PO_2}{RO_2}, \tag{5}$$

míg az O_1MT háromszög és AGT háromszög hasonlósága miatt

$$O_1T = \frac{AT^2}{2GT} = \frac{AT^2}{2UJ}. \tag{6}$$

C (és így O_2) elnevezése miatt

$$RO_1 = RT - O_1T = O_2U - O_1T,$$

(4) és (6) segítségével ebből

$$O_1R = \frac{AU^2 - AT^2}{2UJ} = \frac{(AU^2 - UJ^2) - (AT^2 - UJ^2)}{2UJ} =$$

$$\frac{AJ^2 - AG^2}{2UJ} = \frac{AJ - AG}{UJ} \cdot \frac{AJ + AG}{2},$$

azaz

$$O_1R = \frac{(AJ - AG)O_2S}{UJ}. \tag{7}$$

Végül E definíciója miatt:

$$\frac{ED - CD}{ED} = \frac{AC}{AD},$$

ahonnan

$$ED = \frac{CD \cdot AD}{AD - AC}. \tag{8}$$

Mármost (1), (2), (7) és (8) segítségével (5) így alakítható át:

$$O_4P = \frac{(AJ - AG)O_2S}{UJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CD \cdot AD}{AD - AC} \cdot \frac{1}{2SO_2}.$$

Mivel pedig

$$\frac{AJ - AG}{AD - AC} = \frac{1}{2},$$

azért (3) alapján

$$O_4P = \frac{CD \cdot AD}{8UJ} = \frac{CD}{4} \cdot \frac{\frac{AD}{2}}{UJ} = O_2S \cdot \frac{AJ}{UJ} = O_3S,$$

ami bizonyítandó volt. Hasonlóan bizonyítható az állítás akkor is, ha A szerepét az e-től távolabbi metszéspont játssza. (Ha előjeles távolságokkal dolgozunk, nincs szükség erre a megkülönböztetésre.)

Donga György (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A bizonyítás elvégezhető valamely az A körüli körre vonatkozó inverz alakzatokra való áttéréssel is.