Bevezetünk néhány jelölést, hogy könnyebben tudjuk magunkat kifejezni: sign u jelentse a következő függvényt:

$$\operatorname{sign} u = \begin{cases} 1, & \text{ha } u > 0, \\ 0, & \text{ha } u = 0, \\ -1, & \text{ha } u < 0. \end{cases}$$

Ha $u \neq 0$, $(\operatorname{sign} u) \cdot \infty$ jelentse a $+\infty$, ill. $-\infty$ tágabb értelemben vett határértéket aszerint, hogy u pozitív vagy negatív. Az $f(x)$ függvény jobb, ill. bal oldali határértékét a 0 helyen (vagyis ha x csak pozitív, ill. csak negatív számokon át tart 0-hoz) így jelöljük:

$$\lim_{x\to+0} f(x), \quad \text{ill.} \quad \lim_{x\to-0} f(x).$$

A feladat megoldására térve, feltevésünk szerint $a \to 0$, de $a \neq 0$.

α) Ha $b = c = 0$, akkor mindkét gyök 0 minden $a \neq 0$-ra, tehát

$$\lim_{a\to0} x_{1,2} = 0.$$

β) Ha $c = 0$, de $b \neq 0$, akkor

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a},$$

ezért

$$\lim_{a\to0} x_1 = 0,$$

másrészt léteznek a következő, tágabb értelemben vett határértékek:

$$\lim_{a\to+0} x_2 = (-\operatorname{sign} b) \cdot \infty, \quad \lim_{a\to-0} x_2 = (\operatorname{sign} b) \cdot \infty.$$

Mivel azonban az $a \to 0$ feltevés megengedi, hogy a tetszőleges előjelű értékeket vehessen fel, azért

$$\lim_{a\to0} x_2$$

tágabb értelemben sem létezik, csupán ez igaz:

$$\lim_{a\to0} |x_2| = +\infty.$$

γ) $b = 0$ és $c \neq 0$ esetén

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

tehát ha sign a = sign c, akkor nincs valós gyök, míg ha sign a = −sign c, akkor mindkét gyök valós. Ezért – mivel sign c rögzített, viszont $a \to 0$ esetén sign a felveheti $a+1$ és $a-1$ értékek mindegyikét –,

$$\lim_{a\to0} x_{1,2}$$

nem létezik. Mindkét gyöknek vagy a jobb vagy a bal oldali, tágabb értelemben vett határértéke létezik c előjelétől függően, és ez $+\infty$, ill. $-\infty$.

δ) Végül $c \neq 0$, $b \neq 0$ esetén

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$\frac{4ac}{2a(-b \mp \sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}.$$

Az utolsó alak nevezője $-b \mp |b|$-hez tart, ezért, ha $b > 0$, akkor (x_1-nek a négyzetgyök előtti felső előjellel adódó gyököt véve)

$$\lim_{a\to0} x_1 = -\frac{c}{b}.$$

Viszont x_2 esetében a nevező $-b + \sqrt{b^2-4ac}$, minden határon túl csökken abszolút értékben, mégpedig ha sign a = sign c, akkor negatív értékeken át, ha pedig sign a = −sign c, akkor pozitív értékeken át. Így léteznek a következő, tágabb értelemben vett határértékek:

$$\lim_{a\to+0} x_2 = -\infty, \qquad \lim_{a\to-0} x_2 = +\infty,$$

ezért $\lim_{a\to0} x_2$ nem létezik, csupán ez állítható:

$$\lim_{a\to0} |x_2| = +\infty.$$

Ha pedig $b < 0$, akkor ugyanilyen meggondolással az adódik, hogy

$$\lim_{a\to+0} x_1 = -\infty, \qquad \lim_{a\to-0} x_1 = -\infty, \qquad \lim_{a\to0} x_2 = -\frac{c}{b}.$$

Papp Zoltán