

I. megoldás. Először a -t fejezzük ki az

$$a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} = A,$$

másképpen $a^2 - Aa + 1 = 0$ egyenletből. A két gyök szorzata 1, így

$$a_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4}}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{a_1},$$

és ezek csak egy értéket adnak A_n céljára, hiszen

$$a_1^n + \frac{1}{a_1^n} = \frac{1}{a_2^n} + a_2^n,$$

éspedig

$$(1) \quad A_n = \frac{1}{2^n} \left\{ (A + \sqrt{A^2 - 4})^n + (A - \sqrt{A^2 - 4})^n \right\}.$$

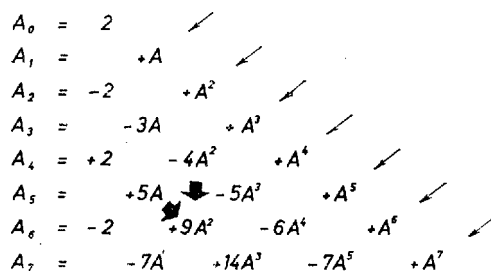
A kapott kifejezés A -nak polinomja, mert a két n -edik hatvány kifejtése csak a négyzetgyökös kifejezés páratlan kitevős hatványainak előjelében különbözik, ezek összege pedig megfelelő páronként 0.

A legutóbbi megállapításban csak pozitív egész n -ekre gondoltunk. Minthogy azonban – az n -nel tovább is pozitív egész számot jelölve – fennáll $A_{-n} = A_n$, továbbá $n = 0$ esetén minden a -ra $A_0 = 2$ (hacsak $a \neq 0$), és ezt (1) is kiadja, azért (1) minden egész n -re érvényes.

Adott A esetében a és A_n akkor valós, ha $|A| \geq 2$. További elemzéstől eltekintünk.

Petz Dénes (Budapest, Veres Pálné Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Problémánk kapcsolatban van az 1234. gyakorlattal,¹ ott A_n -et a $2 \leq n \leq 7$ értékekre állítottuk elő. Ottani eredményeinket kissé átalakítva, az $n = 0, 1$ esetekkel kiegészítve és növekvő hatványok szerint rendezve az 1. ábra sémájában foglaljuk össze.



1. ábra

Ezekre az értékekre A_n -et A polinomjának találtuk, mindegyikben csak az n -nel egyező párosságú kitevők lépnek fel.

Lényegében már az ottani előállításban felhasználtuk az

$$A_{n+1} = A \cdot A_n - A_{n-1}$$

rekurziót, amelyet A_n definíciója alapján könnyen igazolhatunk:

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right),$$

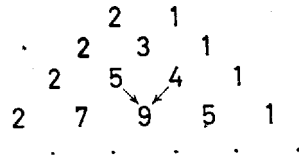
ez a kitevők párosságáról mondottaknak bármely n -re való érvényességét is bizonyítja. Ennek alapján A_{n+1} polinom-alakjában minden egyes együtthatót az 1. ábrabeli séma megfelelő helyén úgy állíthatunk elő, hogy a balra fölülte levő együtthatóból kivonjuk a két sorral fölülte levő együtthatót – amint ezt a séma vastag nyilai mutatják.

Azt látjuk, és könnyen igazolható általában, hogy az előjel minden egyes oszlopban lépésről lépésre változik, a jobbra (45° -os szöggel) lejtő egyenesek mentén viszont állandó. Ezt tudva minden egyes együttható abszolút értékét a balra fölülte és két sorral fölülte álló együttható összege adja.

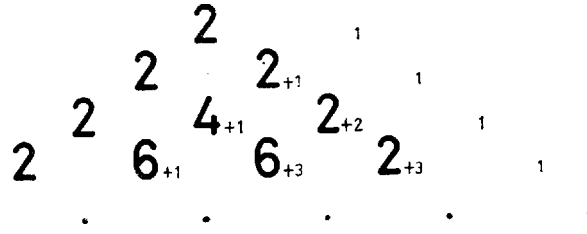
Papp Zoltán, Göndös Ferenc

Megjegyzések. 1. Az együtthatók abszolút értékeire talált előállítás emlékeztet a Pascal-háromszög képezési szabályára. Az elhelyezés szerint is meglesz a megfelelés, ha sémánkat átrendezzük, a balra (45° szöggel) lejtő egymás utáni egyeneseken levő együtthatókat írjuk egy új séma egymás utáni soraiba (2. ábra).

¹K. M. L. 39 (1969) 59. o.



2. ábra



3. ábra

Ezt a sémát – ha belső tagjait a 3. ábra szerint összegekre bontjuk – két háromszög-séma összegének tekinthetjük, a jobb oldali (kisebb számjegyekkel írt) séma maga a Pascal-háromszög, balra 1 hellyel eltolva (nagyobb számjegyekkel írva) pedig a 2-szeresét látjuk.

Az A_n polinom-alakjában fellépő együtthatókat tehát egy binomiális együttható kétszeresének és a rá következő együtthatónak összegéként állíthatjuk elő. Így pl.

$$A_7 = - \left[2 \cdot \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right] A + \left[2 \cdot \binom{4}{1} + \binom{4}{2} \right] A^3 - \left[2 \cdot \binom{5}{0} + \binom{5}{1} \right] A^5 + \binom{6}{0} A^7.$$

Innen leolvashatjuk az általános alakot (célszerűbben a tagok fordított sorrendjében felírva):

$$A_n = \binom{n-1}{0} A^n - \left[2 \cdot \binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} \right] A^{n-2} + \dots + (-1)^k \left[2 \cdot \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} \right] A^{n-2k} + \dots$$

Az így előállított összefüggést ugyan a fenti megfontolással is bizonyíthatnánk, mégis kényelmesebb közvetlenül, teljes indukcióval bizonyítani: a fenti rekurzió alapján:

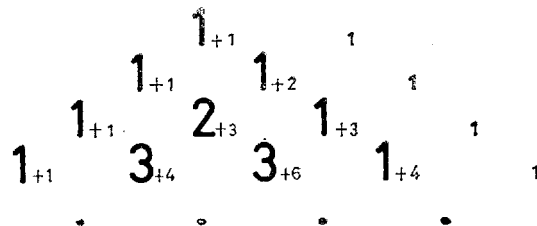
$$\begin{aligned} A_{n+1} &= AA_n - A_{n-1} = A \cdot \sum_{k=0} (-1)^k \left[2 \cdot \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} \right] A^{n-2k} - \\ &\quad - \sum_{j=0} (-1)^j \left[2 \cdot \binom{n-1-j-1}{j-1} + \binom{n-1-j-1}{j} \right] A^{n-1-2j} = \\ &= \sum_{k=0} (-1)^k \left\{ 2 \left[\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-2} \right] + \left[\binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \right] \right\} A^{n+1-2k} = \\ &= \sum_{k=0} (-1)^k \left[2 \binom{n+1-k-1}{k-1} + \binom{n+1-k-1}{k} \right] A^{n+1-2k}. \end{aligned}$$

Az egyes együtthatókban szereplő binomiális együtthatókat össze is vonhatjuk:

$$2 \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k} = \binom{n-k-1}{k-1} \left[2 + \frac{n-2k}{k} \right] = \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1},$$

tehát

$$A_n = \sum_{k=0} \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k} (-1)^k \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1} A^{n-2k}.$$



4. ábra

2. Értelmezhetjük a 2. ábrát a 4. ábra szerint is, a nagy számjegyekkel írt összetevő balra és lefelé 1 – 1 hellyel való eltolással áll elő a másiktól.