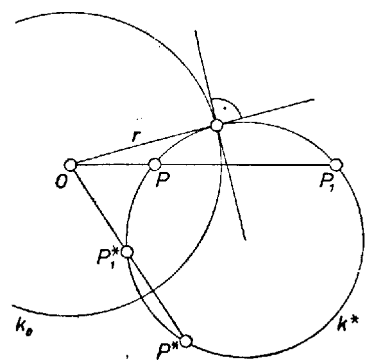
Fel fogjuk használni, hogy egy P ponton és az r sugarú, O középpontú k_0 körre vonatkozó P_1 inverzén átmenő bármelyik k^* kör merőlegesen metszi k_0-t, és hogy k^* bármely pontjának az inverz képét az őt O-val összekötő egyenes metszi ki k^*-ból. (Ha ez az egyenes érintő, akkor a pont a saját inverz képe.) Valóban $OP \cdot OP_1 = r^2$, tehát k^* bármely P^* pontjára és OP^*-nak k^*-gal való P_1^* második metszéspontjára $OP^* \cdot OP_1^* = OP \cdot OP_1 = r^2$, s igy P^* és P_1^* egymás inverz képei; az O-ból k^*-hoz húzott érintők hossza pedig r, vagyis az érintési pontok k_0 és k^* metszéspontjai, a két kör ide húzott sugarai eszerint merőlegesek, vagyis a két kör merőlegesen metszi egymást (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C-vel. Először megmutatjuk, hogy a keresett P pontból származó P_1, P_2, P_3 pontok nem eshetnek egy egyenesbe. A P_i pontok definíciója szerint ugyanis az A, P, P_1, a B, P_1, P_2 és a C, P_2, P_3 ponthármas egy-egy egyenesen van, így ha P_1, P_2, $P_3 = P$ egy egyenesen volna, akkor ugyanerre az egyenesre esnék A, B, C is, ami lehetetlen. Létezik tehát a P_1 P_2, P_3 pontok köré írt kör, jelöljük k-val, középpontját O-val. A k kör a bevezető megjegyzés szerint merőleges a k_1, k_2, k_3 körök mindegyikére.

Mivel k_1, k_2, k_3 sugara egyenlő, azért O egyenlő távolságra van az A, B, C pontok mindegyikétől, tehát O megegyezik az ABC háromszög centrumával. Ez módot ad a k kör megszerkesztésére: mivel a k-hoz, ill. k_1-hez metszéspontjukban húzott érintők merőlegesek egymásra és átmennek az A, ill. O ponton, így az AO szakasz k_4 Thalész-körének és k_1-nek D_1 és D_2 metszéspontjai rajta vannak k-n is. Ezért k sugara egyenlő OD_1-gyel. Ilyen k kör tehát akkor és csak akkor létezik, ha k_1 sugara $r \leq OA$ (egyenlőség esetén k pontkör). Ez egyben a feladat megoldhatóságának is a feltétele, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $r < AO$. (Az $r = AO$ eset triviális, ekkor P és képei azonosak O-val.)

Az, hogy az ABC háromszög szabályos, és hogy a k_1, k_2, k_3 körök sugara egyenlő, azt sugallja, hogy a PP_1P_2 háromszög is szabályos. Keressünk ezért ilyen megoldást. Vegyünk fel egy tetszőleges $P'P_1'P_2'$ szabályos háromszöget k-ban (körüljárása egyezzék ABC-ével), hosszabbítsuk meg $P'P_1'$, $P_1'P_2'$, $P_2'P'$ oldalát P_1'-en, P_2'- n, ill. P'-n túl és jelöljük e félegyeneseknek az ABC háromszög köré írható k' körrel vett metszéspontjait rendre A', B', ill. C'-vel. A $120°$-os forgási szimmetria miatt az $A'B'C'$ háromszög szabályos, létezik tehát olyan elforgatás, amely ezt az ABC háromszögbe viszi át. Vigye át ugyanez az elforgatás a $P'P_1'P_2'$ háromszöget a PP_1P_2 háromszögbe.

Az így nyert P pont egy megoldása feladatunknak, ugyanis P, P_1, A egy egyenesen vannak ($PA > P_1A$), s így a fenti megjegyzés szerint P_1 a P pont k_1-re való inverze, hasonlóan P_2 a P_1 inverze k_2-re, és P a P_2 pont k_3-ra vonatkozó inverze.

Ugyancsak megoldás az a Q, Q_1, Q_2 ponthármas is, amely a P', P_1', P_2' hármasnak az az elforgatása, hogy QQ_1-nek Q-n túli meghosszabbítása megy át A-n (így $QA < Q_1A$), Q_1Q_2-nek Q_1-en túli meghosszabbítása B-n és Q_2Q-nak Q_2-n túli meghosszabbítása C-n. Könnyen látható, hogy ez a két ponthármas – az indexeket nem tekintve – szimmetrikusan helyezkedik el k-nak A-ból induló átmérőjére nézve.

Megmutatjuk, hogy több megoldás nincs, k-nak bármely P-től és Q-tól különböző R pontjából indulunk is ki; a feladat szerinti három inverzió végrehajtása után mindig R-től különböző pontot kapunk. Ennek során k-nak a végpontjaival említett ívein mindig a két végpont által meghatározott rövidebb ívet értjük.

Ha R a PP_1 íven van, k_1-re vonatkozó R_1 inverze is ezen az íven van, R_2 átkerül a PP_2 ívre, és R_3 is ezen az íven adódik, tehát nem lehet azonos R-rel.

Ha R a PP_2 íven van, R_1 a P_1P_2 ívre kerül, R_2 is itt keletkezik, és R_3 a PP_1 íven lesz, ismét nem lehet azonos R-rel.

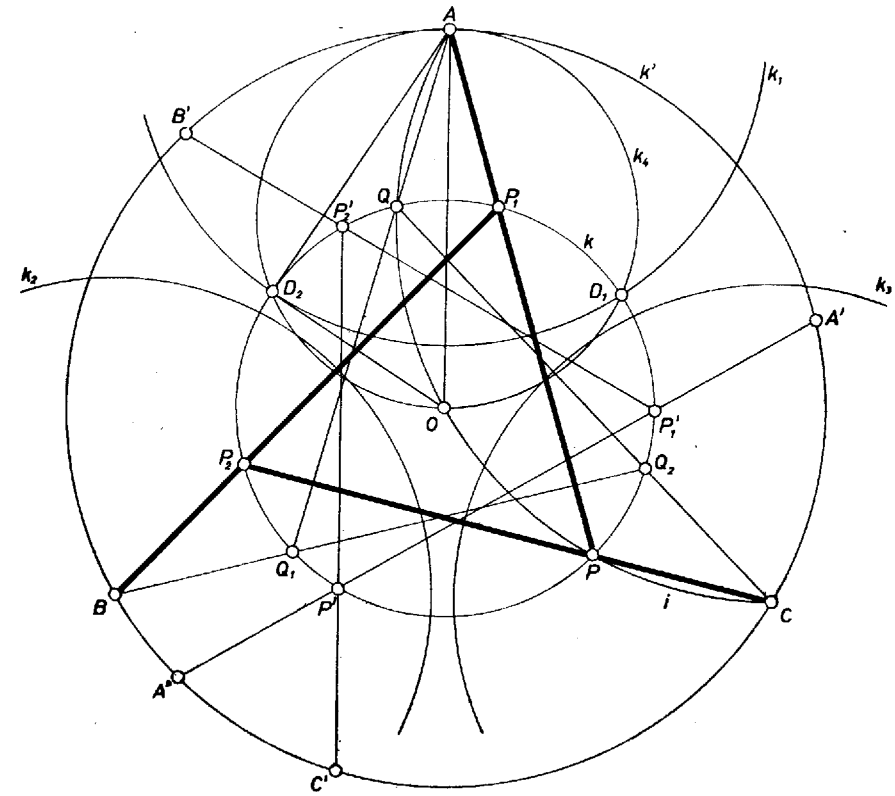
Ha R a P_2Q íven van, R_1-et a QQ_1 ív mindenesetre tartalmazza, R_2 pedig vagy P_1Q_2-re, vagy P_1P_2-re kerül, R_3 eszerint vagy QQ_2 vagy PP_1-en lesz, és egyik esetben sem lehet R-rel azonos.

Végül ha R a QP_1 íven van, R_1 a PQ_1 ívre, R_2 a Q_1Q_2 ívre és R_3 vagy QP_2-re, vagy PP_2-re kerül. Egyik esetben sem kapunk tehát további megoldást.

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)

Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Olyan P-t keresve, mely P_1-gyel és P_2-vel egy szabályos háromszög csúcsait adja, ez kimetszhető k-ból $APC\sphericalangle = 120°$ alapján az AC szakasznak azzal a $120°$-os i látókörívével is, amely AC-nek B-t tartalmazó oldalán van.



2. ábra