Ha $x_1$ és $x_2$ pozitív, akkor $x_1y_1-z_1^2$ és $x_2y_2-z_2^2$ csak úgy lehet pozitív, ha $y_1$, $y_2$ is pozitív. A bal oldali nevezőbe be tudjuk hozni $x_1y_1$ és $x_2y_2$-t a következő egyenlőtlenség alapján:

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)\geq\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2. \tag{3}$$

Valóban, a két oldal különbsége

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2=x_1y_2+x_2y_1-2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}=$$
$$\left(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1}\right)^2\geq 0.$$

Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha van olyan $t$ valós szám, hogy $y_1=tx_1$, $y_2=tx$ $(t=y_1/x_1)$.

A (2) bal oldalán álló tört (3) alapján így növelhető:

$$B=\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leq\frac{8}{\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2-(z_1+z_2)^2}=$$
$$=\frac{2}{\dfrac{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}{2}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}{2}}. \tag{4}$$

Valóban, növeltük a törtet, vagy nem változtattuk, mert a nevezője csak csökkenhetett, de még pozitív maradt a feltételek szerint. Továbbra sem csökkentünk, a két számtani közepet a nevezőben a mértani középpel helyettesítve:

$$B\leq\frac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}}=2\sqrt{\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}\cdot\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}}. \tag{5}$$

Itt a jobb oldali mértani közép helyett a nem kisebb számtani közepet írva ismét nagyítunk és ezzel a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk:

$$B=\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leq$$
$$\leq 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)\right)=\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}. \tag{6}$$

Az egyenlőtlenség jele csak akkor nem hagyható el, ha sem (4), sem (5), sem (6) alatt nem növeltünk. Ez akkor áll fenn, ha alkalmas $t$-vel

$$y_1=tx_1,\quad y_2=tx_2,$$

továbbá

$$\sqrt{x_1y_1}+z_1=\sqrt{x_2y_2}+z_2,\qquad\sqrt{x_1y_1}-z_1=\sqrt{x_2y_2}-z_2,$$

végül

$$x_1y_1-z_1^2=x_2y_2-z_2^2.$$

Az utolsó egyenlőség következik az előző kettőből, továbbá következik belőlük

$$\sqrt{x_1y_1}=\sqrt{x_2y_2},\quad z_1=z_2,$$

végül az előbbiből az első két egyenlőség felhasználásával, mivel az $x$-ek is, $y$-ok is, s így $t$ is pozitív

$$\sqrt{t}x_1=\sqrt{t}x_2,\quad\sqrt{t}>0,\quad\text{tehát}\quad x_1=x_2,\quad\text{és így}\quad y_1=y_2.$$

Egyenlőség tehát egyedül az $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ esetben áll fenn.

*Füredi Zoltán* (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

*Megjegyzés.* A (3) egyenlőtlenség speciális esete a következő, ún. *Cauchy*[1]*-Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenségnek:

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2. \tag{3'}$$

[1]olv. kósi

Valóban $n = 2$, $a_1 = \sqrt{x_1}$, $a_2 = \sqrt{x_2}$, $b_1 = \sqrt{y_1}$, $b_2 = \sqrt{y_2}$, esetén (3)-at kapjuk. ($3'$) is bizonyítható a két oldal különbségének négyzetösszeggé alakításával vagy a következő módon. Adjuk össze $i = 1,\ 2,\ \dots, n$-re az $(a_i x - b_i)^2$ kifejezéseket és rendezzük $x$ hatványai szerint. Mivel ezek semmilyen valós $x$ értékre nem negatívok, így összegük sem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq 0.$$

Szorozva $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$-tel és teljes négyzetté alakítással

$$\begin{aligned} &\big((a_1^2 a_2^2 + \dots + a_n^2)x - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)\big)^2 + \\ &(a_1^2 a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3''}$$

Ha nem minden $a_i$ nulla, akkor választható $x$ úgy, hogy a négyzet alapja 0 legyen, ebben az esetben ($3''$) átmegy ($3'$) egy átrendezett alakjába. Ha $a_i = 0$ teljesül $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$-re, akkor ($3'$) nyilván teljesül az egyenlőség jelével.

Általában ($3'$)-ben csak akkor áll az egyenlőség, ha ($3''$)-ben nem hagyható el, ez pedig akkor következik be, ha egy alkalmas $x = t$ értékre egyidejűleg teljesül

$$(a_i t - b_i)^2 = 0, \qquad \text{ha } i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

azaz

$$b_i = t a_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

vagy ha ($3''$)-t 0-val szorzással kaptuk, azaz minden $a_i = 0$. Ebben az esetben $a_i = ub_i$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$-re $u = 0$-val. A kettőt összefoglalhatjuk így: ($3'$)*-ben akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha van olyan $t$ és $u$, hogy nem mind a kettő 0 és*

$$ub_i = ta_i, \qquad i = 1,\ 2, \dots, n\text{-re.}$$

(A fenti első esetben $u = 1$, a másodikban $u = 0$, $t = 1$ választás megfelelő.)

Mivel a számtani és mértani közép közti, felhasznált egyenlőtlenség is érvényes akárhány nem negatív számra, így a fenti bizonyítás minden változtatás nélkül átvihető a következő egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\text{ha } x_i > 0 \qquad \text{és} \qquad x_i y_i - z_i^2 > 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n\text{-re,}$$

akkor

$$\frac{n^3}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2} \leq$$
$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} + \dots + \frac{1}{x_ny_n - z_n^2}.$$

Egyenlőség csak az $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ esetben áll fenn.