Vizsgáljuk meg, hány négyzet- és hány háromszöglap határolhat egy olyan poliédert, mely a feladat feltételeit kielégíti. Induljunk ki Euler tételéből, mely szerint ha c-vel a csúcsok, l-lel a lapok, $é$-vel az élek számát jelöljük, akkor

$$c + l = é + 2. \tag{1}$$

Legyen esetünkben a négyzetlapok száma n, a háromszögeké h.

Mivel a test minden csúcsa egy és csak egy négyzetlaphoz tartozik hozzá, másrészt pontosan négy háromszöglaphoz, azért

$$c = 4n \qquad \text{és} \qquad c = \frac{3h}{4},$$

innen

$$h = \frac{16}{3}n \qquad \text{és} \qquad l = n + h = \frac{19}{3}n.$$

Továbbá minden csúcsban 5 él fut össze, és minden él 2 csúcsba fut be, így $5c = 2e$. Innen

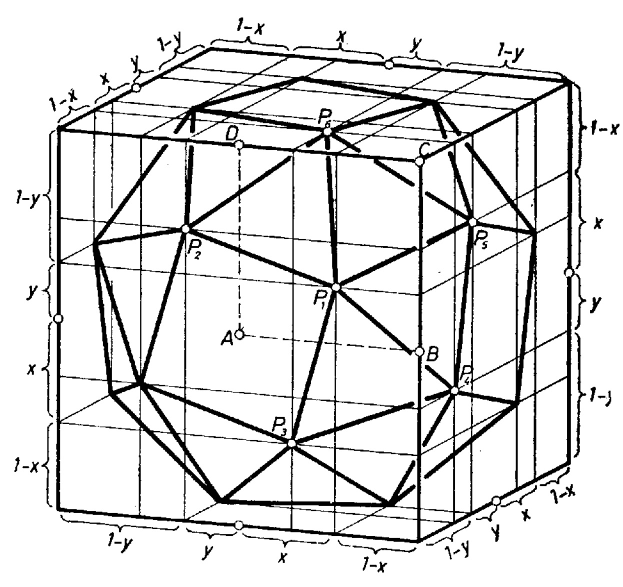
$$e = \frac{5}{2}c = 10n.$$

Behelyettesítve (1)-be c, l és e talált kifejezéseit:

$$4n + \frac{19}{3}n = 10n + 2.$$

Ezt megoldva kapjuk, hogy ha a feladat feltételeit kielégítő poliéder létezik, akkor azt $n = 6$ négyzetlap és $h = 32$ háromszöglap határolja (továbbá azt is, hogy 24 csúcsa és 60 éle van). Kíséreljünk meg konstruálni ilyen testet!

A lapok szabályos volta miatt a poliéder összes élei egyenlők, négyzet-, valamint háromszög lapjai egybevágók. Egybevágók a csúcsoknál található testszögletek is. Azt sejtjük ezekből, hogy a poliéder alkalmas transzformáció útján önmagával fedésbe hozható, pl. négyzetlapjai átvihetők egymásba. Ezért feltesszük, hogy a 6 négyzetlap síkjai egy kockát határoznak meg. A konvexség alapján elég az olyan esetekre szorítkoznunk, amikor a poliéder négyzetlapjai a kocka oldallapjainak belsejébe esnek. Feltesszük továbbá, hogy a szemben levő oldallapok középpontjait összekötő egyenesek bármelyike (a kocka laptengelyei) körül 90°-kal, valamint a kocka csúcstengelyei (testátlói) körül 120°-kal elforgatva a poliéder a kockával együtt önmagába megy át. (Hangsúlyozzuk: nem bizonyítottuk, hogy csak ilyen típusú megoldás létezhet, csupán természetesnek tűnő feltételeket tettünk annak reményében, hogy van ezeket is kielégítő megoldás!) Nem jelenti az általánosság megszorítását, ha a kocka élét 2 egységnek választjuk, továbbá feltesszük, hogy – az ábra jelölőseit használva – P_1 az ABC háromszögben van.



Jelöljük P_1 nek az AD; ill. az AB egyenestől mért távolságát x-szel, ill. y-nal, ezekkel a $P_1P_i (i = 2, \dots 6)$ távolságokat könnyen kifejezhetjük, és ezek egyenlőségéből a feltett forgási szimmetriák alapján következik, hogy a poliéder összes élei egyenlők. Az ábrából kivehetően

$$P_1P_2^2 = P_1P_3^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2,$$
$$P_1P_4^2 = (2y)^2 + (1 - x)^2 + (1 - x)^2,$$
$$P_1P_5^2 = P_1P_6^2 = (1 - x)^2 + (x - y)^2 + (1 - y)^2.$$

Így a

$$P_1P_2^2 = P_1P_4^2, \qquad P_1P_2^2 = P_1P_5^2 \tag{2}$$

kétismeretlenes egyenletrendszert kell vizsgálnunk. Mivel azonban csak azt kell megállapítanunk, létezik-e a kívánt poliéder, nem szükséges megoldanunk az egyenletrendszert, csak megmutatni, hogy van a $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ feltételeket kielégítő megoldása.

(2) azonos átalakítása útján:

$$\begin{aligned} y^2 + 1 &= 2x, \\ x + xy + y &= 1, \end{aligned} \tag{3}$$

és x-et kiküszöbölve

$$y^3 + y^2 + 3y - 1 = 0.$$

Az egyenlet bal oldala $y = 0$-nál a -1, $y = 1$-nél pedig a $+4$ értéket veszi fel, és mivel folytonos függvénye y-nak, azért valamely közbülső y_0 érték esetén 0 értékűvé válik. Ezen értéket (3)-ba helyettesítve a nyert x_0 érték is 0 és 1 közé esik, hiszen $x = \frac{1}{2}(y_0^2 + 1)$. Ez az x_0 és y_0 értékpár olyan P_1 pontot határoz meg, mely kívánalmainknak megfelelő poliédert származtat (jóllehet lényegesen többet követeltünk meg, mint a feladat).

Füredi Zoltán, Göndőcs Ferenc, Vajnági András

Megjegyzés. A talált poliéder egyike az ún. *Arkhimédész-féle félszabályos testek*nek. (Ezeknek minden lapja szabályos sokszög – éspedig legalább két különböző oldalszámú sokszög fordul elő rajtuk –, és minden csúcsukban ugyanannyi lap fut össze az előforduló szabályos sokszögek mindegyikéből.) Meg lehet mutatni, hogy az eredeti követelményeknek is csak egyetlen poliéder tesz eleget, továbbá annak síkra való tükörképe. (A poliédernek csak forgási szimmetriái vannak, tükrös szimmetriái nincsenek.) – Egyébként a szabályos oktaéderből is leszármaztatható a poliéder. Annak a 8 háromszögnek a síkja határol szabályos oktaédert, amelynek mindegyik csúcsa a kockának másik-másik lapján van rajta, más szóval, amelyekhez mindegyik élük mentén háromszöglap kapcsolódik.