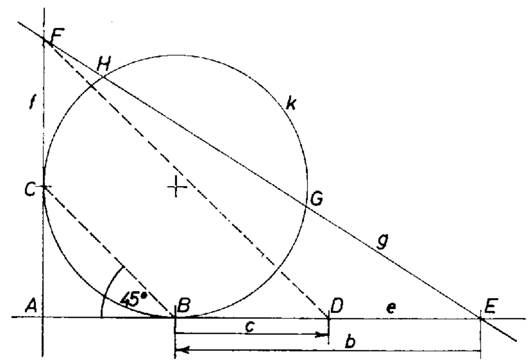
Érintse k az e és f egyenest a B, ill. C pontban, és jelöljük e és f metszéspontját A-val (1. ábra).



1. ábra

A körhöz külső pontból húzott szelőkre vonatkozó tétel szerint

(1) $$b = EB = \sqrt{EG \cdot EH}, \qquad c = FC = \sqrt{FG \cdot FH}.$$

Egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy $b > c$, és E, F, G, H különböző pontok.

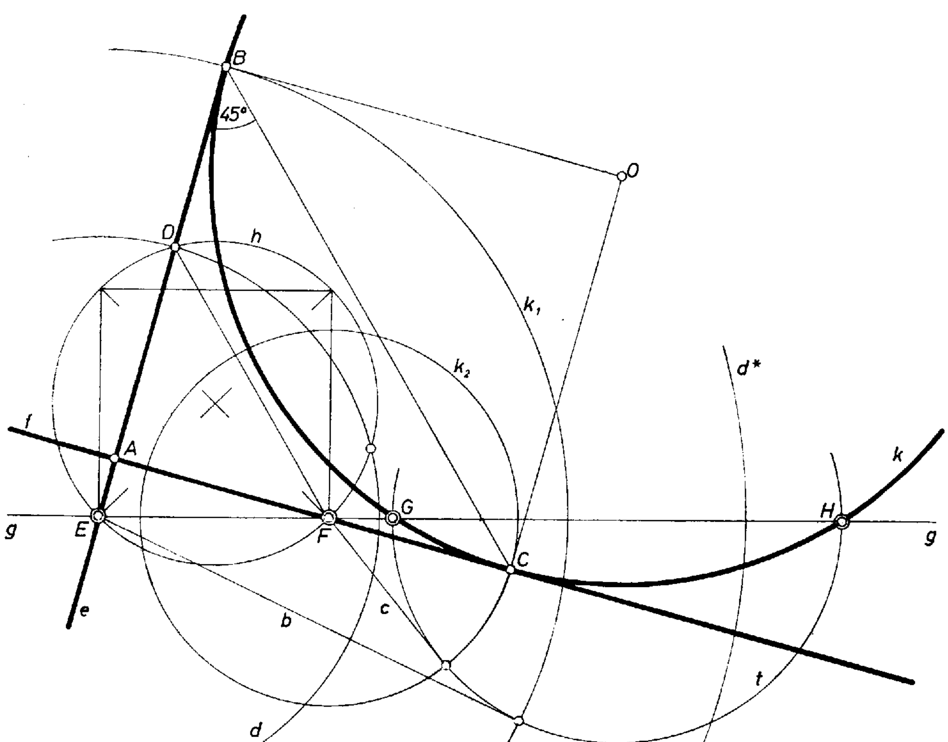
Húzzunk F-en át BC-vel párhuzamost, messe ez e-t D-ben, így $BD = CF = c$. E-ből D-be az egymáshoz csatlakozó EB és BD szakaszokon keresztül juthatunk; ha ezek ellentétes irányúak, akkor

(2a) $$ED = b - c$$

ha pedig megegyező irányúak, akkor

(2b) $$ED = b + c.$$

Mivel a DF és e szöge 45°-os, D-ből az EF szakasz 45°-os vagy 135°-os szög alatt látszik, (2) alapján D-nek E-től mért távolsága is ismert, azért D megszerkeszthető. D meghatározza az e és f egyeneseket és ezekből k már könnyen meghatározható.



2. ábra

Szerkesztésünk első lépéseként a GH szakasz fölé t Thalész-kört rajzolunk (2. ábra). Az E, F pontból egy-egy érintőt húzunk t-hez, ezek hossza b, illetve c. Az E pont körül $b - c$ és $b + c$, sugárral kört rajzolunk, ez d, ill. d^*.

Majd az EF szakasz fölé g egyik oldalán négyzetet szerkesztünk, az e köré írt kör legyen h. A h és d(vagy h és d^*) körök egyik metszéspontja legyen D, ekkor ED a keresett e egyenes, erre F-en át merőlegest rajzolva kapjuk f-et, e és f metszéspontja A. Az e egyenesen E-ből D felé felmérjük az $EB = b$ szakaszt, a kapott B ponton át párhuzamost húzunk DF-fel, ez f-et C-ben metszi. Végül A-t tükrözzük a BC egyenesre, kapjuk O-t, a keresett k kör az O körül rajzolt, OB sugarú kör lesz.

A szerkeszthetőség első feltétele, hogy az E, F pontok ne legyenek rajta a GH szakaszon. Ez kétféleképpen teljesülhet: az EF szakasz vagy tartalmazza a GH szakaszt, vagy nincs vele közös pontja. Ha ez teljesült, akkor a leírt szerkesztés a d, d^*, h körök megrajzolásáig elvégezhető. Megjegyezzük, hogy a h kört a g egyenes bármelyik oldalán felvehetjük, hiszen feladatunk tetszőleges megoldását g-re tükrözve ismét megoldást kapunk.

A h kör átmérője

$$h = \sqrt{2}EF, \tag{3}$$

így d és h csak akkor metszik egymást, ha

$$h \geqq b - c, \tag{4a}$$

és egyenlőség esetén 1, különben 2 metszéspontjuk van.

A d^* és h körök esetében hasonlóan

$$h \geqq b + c \tag{4b}$$

a D metszéspont létrejövésének a feltétele. Könnyen látható, hogy a D pont meghatározása után fenti szerkesztésünk egyértelműen végrehajtható.

A továbbiakban, ha az EF szakasz tartalmazza a GH szakaszt, akkor

$$b = \sqrt{EG \cdot EH} < \frac{1}{2}(EG + EH),$$
$$c = \sqrt{FG \cdot FH} < \frac{1}{2}(FG + FH)$$

miatt $b + c < EF$, tehát $(4a)$-ban is, $(4b)$-ben is az egyenlőtlenség teljesül, a g-re való tükrözést is figyelembe véve 8 megoldást kapunk. Ha viszont az EF, GH szakaszoknak nincs közös pontjuk, az is előfordulhat, hogy $(4a)$ sem teljesül, és a feladatnak nincs megoldása.

Rátérünk szerkesztésünk helyességének bizonyítására. A körhöz külső pontból húzott szelők darabjaira vonatkozó tétel szerint bármely, a G, H pontokon átmenő körhöz húzunk is érintőt az E, F pontokból, ezek hossza az (1) alatti b és c, jogosan neveztük tehát az általunk megszerkesztett szakaszokat b-nek és c-nek. A szerkesztés további menetéből közvetlenül következik, hogy a kapott e, f egyenesek merőlegesek egymásra; rendre átmennek az E, F pontokon; az ADF háromszög egyenlő szárú és derékszögű, és $EB = b$.

Ha a D pont a h és d körök metszéspontja, $ED = b - c < EB$, D tehát az EB szakaszon , és $DB = FC = c$. Ha viszont D a h és d^* metszéspontja, $ED = b + c > EB$, ekkor B van az ED szakaszon, de ismét $DB = FC = c$. Mivel az ABC háromszög is egyenlő szárú és derékszögű, $ABOC$ négyzet, és k a B, C pontokban érinti az e, f egyeneseket. Mivel k-hoz az E, F pontokból húzott érintők hossza rendre b, illetve c, k merőlegesen metszi az E középpontú, b sugarú k_1 kört és az F középpontú, c sugarú k_2 kört. Megmutatjuk, hogy a k_1, k_2 köröket merőlegesen metsző körök mindegyike átmegy a G, H pontokon.

Azt már beláttuk, hogy tetszőleges, a G és H pontokon átmenő kör merőlegesen metszi a k_1, k_2 köröket. Legyen P (a síkon) tetszőleges, de nem a g egyenesen levő pont. Ha k_0 a P-n is átmenő, a k_1, k_2, köröket merőlegesen metsző kör, az EP, FP félegyenesek k_0-t olyan P_1, P_2 pontokban metszik, amelyekre

$$EP \cdot EP_1 = b^2; \qquad FP \cdot FP_2 = c^2,$$

ami a P_1, P_2 pontokat egyértelműen meghatározza.

Könnyen látható, hogy a k_1, k_2 körök nem metszhetik egymást, így a P_1, P_2 pontok közül legalább az egyik P-től különböző. Ha tehát k_0 átmegy P-n, és a k_1, k_2 köröket merőlegesen metszi, át kell mennie a sík egy további – P, k_1 és k_2 által egyértelműen meghatározott – Q pontján is. Továbbmenve Q-ból k_0-nak egy további – ugyancsak egyértelműen meghatározott – R pontjához jutunk, a sík tetszőleges (nem a g egyenesen levő) P pontján át tehát legfeljebb egy kör mehet át, mely a k_1, k_2 körüket merőlegesen metszi. A PGH háromszög köré írható kör merőlegesen metszi őket, így mindegyik, a k_1, k_2 köröket merőlegesen metsző kör átmegy a G, H pontokon. Ezzel bizonyításunkat befejeztük. – A diszkussziót – hely hiányában – az olvasóra hagyjuk.

Megjegyzések. 1. A figyelmen kívül hagyott $b = c$ esetben egyszerű Apollóniosz-feladattal állunk szemben.

2. Hasonlóan oldható meg a feladat akkor is, ha e és f között tetszőleges szöget írunk elő.