I. megoldás. Fel fogjuk használni azt, hogy l egymás utáni természetes szám szorzata osztható $l!$-sal. Ugyanis

$$\frac{(r+1)(r+2)\cdot\ldots\cdot(r+l)}{l!}=\binom{r+l}{l}$$

és a binomiális együtthatók egész számok (ez a kombinatorikai értelmezésből nyilvánvaló).

A feladat megoldására térve, először megállapítjuk, hogy $n!$ törzstényezős felbontásában p hányadik hatványon fordul elő. Ez az m kitevő nyilván előállítható az

$$m=m_1+m_2+\ldots+m_i+\ldots+m_u$$

alakban, ahol m_i jelöli az 1-től n-ig terjedő számok közül a p^i-nel oszthatók számát. Így ugyanis minden p^i-nel osztható, de p^{i+n}-nel már nem osztható tényezőt i-szer veszünk számításba. Eszerint

$$m_i=\left[\frac{n}{p^i}\right],$$

és

$$m=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^u}\right],$$

ahol

$$p^u\geqq n<p^{u+1}.$$

Feltevésünk szerint $p^k\mid n!$ így

$$k\leqq\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^u}\right],$$

A jobb oldalt így alakítjuk:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^u}\right]\leqq\frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\ldots+\frac{n}{p^u}=$$
$$=n\frac{p^u-1}{p^u(p-1)}=\frac{n}{p-1}\left(1-\frac{1}{p^u}\right)\leqq\frac{n}{p-1},$$

tehát

$$k\leqq\frac{n}{p-1},$$

vagyis

$$k(p-1)\leqq n.$$

Ezért az $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ szorzatot felbontva egymás utáni tényezőiből alakított $p-1$ tagú csoportokra, legalább k csoport képezhető. Minden ilyen csoport az előrebocsátott megjegyzés szerint osztható $(p-1)!$-sal. Tehát $\big((p-1)!\big)^k\mid n!$

Másrészt p^k és $\big((p-1)!\big)^k$ relatív prímek, így a feltevés alapján szorzatuk is osztója $n!$-nak, tehát $(p!)^k\mid n!$.

Pál Jenő (Kaposvár, Táncsics M.Gimn., IV. o. t.)
Füredi Zoltán (Budapest, Móricz Zs. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. $n!$ prímfelbontásában egy p prímszám kitevője úgy határozható meg, hogy a p-vel osztható tényezőkből kiemeljük p legmagasabb hatványát, amivel osztható, és kitevőiket összeadjuk. A p-vel osztható tényezők $p,2p,\ldots,mp$, ahol

$$mp\leqq n<(m+1)p,\quad \text{azaz}\quad m=\left[\frac{n}{p}\right].$$

Ennek alapján $n!$ így bontható fel:

$$n!=\big\{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(p-1)\big\}\cdot\big\{(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+(p-1))\big\}\cdot\ldots\cdot$$
$$\cdot\big\{((m-1)p+1)\cdot\ldots\cdot((m-1)p+(p-1))\big\}\cdot\big\{(mp+1)\cdot\ldots\cdot n\big\}\cdot m!p^m.$$

(Itt az utolsó kapcsos zárójelben levő szorzat nem lép fel, ha $p\mid n$, viszont csak az áll a jobb oldalon, ha $n<p$.) Ez a felbontás teljes indukciós bizonyítást sugall.

Ha $n<p$, akkor k csak 0 lehet, és az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük most fel, hogy $n\geqq p$, és az állítás igaz az n-nél kisebb természetes számokra. Ekkor a fenti felbontás kapcsos zárójelben levő szorzatai oszthatók $(p-1)!$-sal, szorzatuk tehát $\big((p-1)!\big)^m$-nel. Az állítás tehát ismét igaz, ha $k\leqq m$. Ha viszont $k=m+k'$, és $k'\geqq1$, akkor előrebocsátott megjegyzésünk szerint $p^{k'}$ az $m!$ osztója kell hogy legyen. Mivel $m<n$, így rá feltétel szerint igaz az állítás, $m!$ osztható $(p!)^{k'}$-nel is. így $n!$-nak osztója

$$\big((p-1)!\big)^m(p!)^{k'}p^m=(p!)^{m+k'}=(p!)^k.$$

Az állítás tehát minden n-re érvényes.

Fried Ervin