I. megoldás. Mindhárom adott n-érték 3-mal osztható páratlan szám, közös alakjuk $6k+3$, ahol rendre $k = 3,\ 9(=3^2),\ 27(=3^3)$.Megmutatjuk, hogy ha $n = 6k+3$ és $k \geqq 0$, akkor (1)-nek a (2)-t is teljesítő megoldásainak száma $3k^2$

(1)-nek természetes számokban $\binom{n-1}{2}$ megoldása van. Ezt a következőképpen látjuk be. A megoldások száma nyilván annyi, ahányféleképpen egy n tagból álló csuklós mércéből (colstok) két csuklójában meghajlítva 3 tagú töröttvonalat formálhatunk, feltéve, hogy a mérce elejét és végét megkülönböztetjük. A mércéből az egymás utáni vonalrészekbe jutó tagok száma rendre x_1, x_2, x_3. Az n tag közti $n-1$ csukló közül 2-t a töröttvonal szögpontjai céljára valóban $\binom{n-1}{2}$-féleképpen választhatunk ki.

Ezen megoldások közül eltávolítjuk azokat, amelyekben nem minden ismeretlen értéke különböző, a megmaradókat pedig csak növekvő sorrendben vesszük figyelembe.

$x_1 = x_2 = x_3$ egyetlen megoldásban lép fel, amikor közös értékük $2k+1$.

Az $x_1 = x_2 \neq x_3$ típusú megoldásokban x_1 értéke most már $1,\ 2,\ \ldots,\ 2k,\ 2k+2,\ 2k+3,\ \ldots,\ 3k+1$ lehet, és ez meghatározza a megoldást, tehát számuk $3k$. Ugyanennyi az $x_1 = x_3 \neq x_2$, $x_1 \neq x_2 = x_3$ típusú megoldások száma is. Így (1)-nek különböző természetes számokban

$$\binom{6k+3-1}{2} - 1 - 3\cdot 3k = \frac{(6k+2)(6k+1)}{2} - 1 - 9k = 18k^2$$

megoldása van. Ezek $3! = 6$-osával csak sorrendben különböznek, a növekvően rendezettek száma tehát valóban $3k^2$.

Pröhle Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük az (1) egyenlet (2) feltételt kielégítő megoldásainak a számát $f(n)$-nel. $f(n)$ értéke kis természetes számokra könnyen előállítható :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7

Ha valamely n-re ismerjük az összes (a (2) feltételt kielégítő) megoldást, azokban mindegyik változóból 1-et levonva az összeg 3-mal csökken, és (2)-t továbbra is kielégítő, (különböző) megoldásokat kapunk, kivéve azt az esetet, amikor $x_1 = 1$. Ha tehát az n-hez tartozó megoldások közül elhagyjuk azokat, melyekben $x_1 = 1$, a visszamaradó megoldások száma egyenlő lesz az $(n-3)$-hoz tartozó megoldások számával

$x_1 = 1$ mellett

$$x_2 + x_3 = n-1; \qquad 1 < x_2 < x_3. \tag{3}$$

Ha n páratlan: $n = 2k+1$, akkor x_2 lehetséges értékei: $2, 3, \ldots, k-1$; (3) megoldásainak a száma $k-2$. Ha n páros: $n = 2k$, akkor x_2 lehetséges értékei: $2,\ 3,\ \ldots,\ k-1$, a megoldások száma ismét $k-2$. Mindkét esetben $\left[\frac{n}{2}\right] - 2$ a megoldások száma, tehát

$$f(n) - f(n-3) = \left[\frac{n}{2}\right] - 2.$$

Egyszerűbb eredményt kapunk, ha $f(n)$ és $f(n+6)$ értékét hasonlítjuk össze: a fenti összefüggés alapján

$$f(n+6) - f(n) = \left\{f(n+6) - f(n+3)\right\} + \left\{f(n+3) - f(n)\right\} =$$
$$= \left[\frac{n+6}{2}\right] - 2 + \left[\frac{n+3}{2}\right] - 2 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n.$$

Ha $n = 6k+l$ $(l = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$, akkor

$$f(n) = (n-6) + f(n-6) = (n-6) + (n-12) + f(n-12) = \ldots = (n-6)+$$
$$+(n-12) + \ldots + l + f(l) =$$
$$\sum_{j=0}^{k-1}(l+6j) + f(l) = k(3k+l-3) + f(l),$$

ahol $f(l) = 0$, ha $l < 6$ és $f(6) = 1$. Speciálisan $l = 3$ mellett $f(n) = 3k^2$, amint azt az I. megoldásban is láttuk – a bemutatott számpéldák mind ennek speciális esetei.

Megjegyzés. Egyszerű előállítás $f(n)$-re a következő: vesszük azt az egész számot, mely legközelebb van $\frac{(n-3)^2}{12}$-höz. Ez ugyanis teljesül n kis értékeire és

$$\frac{(n+3)^2}{12} - \frac{(n-3)^2}{12} = n$$

miatt a fenti $f(n+6) - f(n) = n$ összefüggés alapján minden további n-re is teljesül.