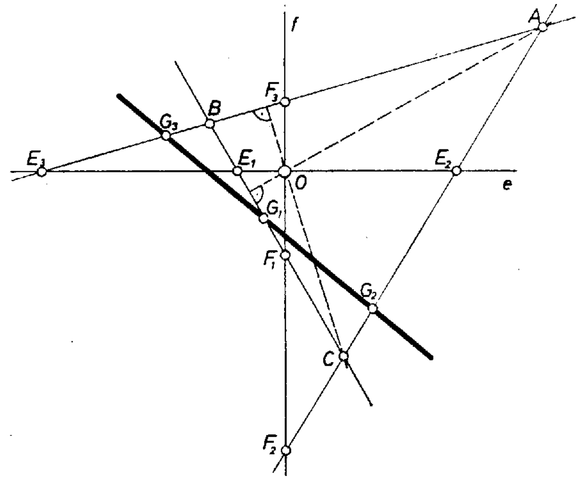
Legyen az adott háromszög ABC, a magasságpontján átmenő két merőleges egyenes e és f, a BC, CA, AB egyenesekkel való metszéspontjaik, amennyiben létrejönnek, E_1, F_1; E_2, F_2; E_3, F_3, a köztük levő szakaszok felezőpontjai G_1 G_2. G_3.



A feladat állítása csak arra az esetre mond ki valamit, ha ezek a pontok mind létrejönnek és G_1, G_2, G_3 különböző, így csak ezekkel az esetekkel foglalkozunk. Kizárjuk tehát a derékszögű háromszög esetét és azokat az eseteket, amelyekben e vagy f valamelyik oldallal párhuzamos.

Válasszuk e-t és f-et egy koordinátarendszer abszcissza-, ill. ordinátatengelyének. Az oldalegyenesek egyenlete legyen rendre $y = m_i x + b_i$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor az F_i pontok az ordinátatengelyen levő metszéspontok, koordinátáik $(0, b_i)$, E_i koordinátái pedig $\left(-\dfrac{b_i}{m_i},\ 0\right)$, mert $m_i \neq 0$, mert a tengelyek nem párhuzamosak háromszögoldallal). A felezőpontok koordinátái $G_i\left(-\dfrac{b_i}{2m_i},\ \dfrac{b_i}{2}\right)$.

Fejezzük most ki azt, hogy az origó a háromszög magasságpontja. Az $y = m_1 x + b_1$ és $y = m_2 x + b_2$ egyenesek C metszéspontjának koordinátái

$$\left(\frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1},\quad \frac{m_2 b_1 - m_1 b_2}{m_2 - m_1}\right),$$

(a háromszög oldalegyeneseinek iránytangensei nem lehetnek egyenlők, $m_2 - m_1 \neq 0$. C helyvektora merőleges az m_3 iránytangensű harmadik oldalra, tehát

$$m_3 \cdot \frac{m_2 b_1 - m_1 b_2}{b_1 - b_2} = -1, \quad m_3 = \frac{b_2 - b_1}{m_2 b_1 - m_1 b_2}.$$

(Itt sem $b_1 \neq b_2$, mert akkor az orditánatengely a $C-$ átmenő magasságvonal volna, s így az abszcissza-tengely háromszögoldallal volna párhuzamos, sem $m_2 b_1 - m_1 b_2 \neq 0$, mert akkor meg az abszcisszatengely volna a C-n átmenő magasságvonal.)

A feladat állítása ekvivalens azzal, hogy a G_1G_2 és G_2G_3 egyenesek iránytangense:

$$\frac{b_2 - b_1}{\dfrac{b_2}{m_2} - \dfrac{b_1}{m_1}} \quad \text{és} \quad \frac{b_3 - b_2}{\dfrac{b_3}{m_3} - \dfrac{b_2}{m_2}}$$

megegyezik. Az előbbit a fönt nyert összefüggés alapján így alakíthatjuk át:

$$\frac{b_2 - b_1}{\dfrac{b_2}{m_2} - \dfrac{b_1}{m_1}} = m_1 m_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{b_2 m_1 - b_1 m_2} = -m_1 m_2 m_3.$$

Ebből az utóbbit az 1, 2, 3 indexek helyett rendre 2, 3, 1-et írva kapjuk, akkor azonban a jobb oldalon csak a tényezők sorrendje cserélődik meg, tehát a két iránytangens megegyezik. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Papp Zoltán (debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat állítása az irodalomban *Droz-Farny* tétele néven ismeretes.