A feladat nem kívánta az összes, a feltételeket kielégítő szám megadását. Különböző ésszerű megszorítás mellett már kevés próbálgatással lehetett megoldást találni. Az alábbiakban eljárást mutatunk az összes megoldás megkeresésére.

Megoldás. Jelöljük a keresett szám jegyeit x, y-nal, azaz a számot $100x+y$ alakban írjuk, ahol $x\neq 0$, mivel a szám kétjegyű, s így

$$0<x\leqq 99,\qquad 0\leqq y\leqq 99. \tag{1}$$

A feladat a következő egyenlet teljesülését kívánja:

$$(100x+y)(x+y)=x^3+y^3=(x+y)\big(x^2-xy+y^2\big). \tag{2}$$

Mivel feltételeink szerint $x+y>0$, így ez az egyenlet ekvivalens az $x+y$ szorzó elhagyásával keletkező egyenlettel, amit y hatványai szerint rendezünk, 4-gyel megszorzunk és teljes négyzetté kiegészítünk.

$$4y^2-4(x+1)y-4x(100-x)=(2y-x-1)^2-\big[(x+1)^2+4x(100-x)\big]=0.$$

Jelöljük $2y-x-1$-et z-vel. Ennek abszolút értéke nagyobb, mint $x+1$, mert pozitív x-re a szögletes zárójel mindkét tagja pozitív. Ez azonban (1) mellett csak úgy lehet, ha $2y>x+1$, azaz z pozitív. Másrészt (1) mellett a szögletes zárójel első tagja legalább 4, a második legalább 396, mert $x=1$-re ennyi, ha pedig $x>1$, akkor (1) mellett x és $100-x$ közül a kisebbik is legalább 2, a nagyobb legalább 50. Így $z\geqq 20$.

Bontsuk tagokra és alakítsuk teljes négyzetté a fent a szögletes zárójelben levő kifejezést is:

$$(2y-x-1)^2+3(x-67)^2=13\,468,$$

vagy

$$x-67=t \tag{3}$$

jelöléssel:

$$z^2+3t^2=13\,468. \tag{4}$$

Az eredeti ismeretleneket az újakkal kifejezve:

$$x=t+67,\qquad y=\frac{z+t}{2}+34. \tag{3'}$$

A $(3')$, (4) együttesen ekvivalens (2)-vel, sőt $(3')$ a (2) és (4) egész számokból álló megoldásait is kölcsönösen egymáshoz rendeli, hiszen világos, hogy ha x, y egész, akkor z és t is. Fordítva pedig azért teljesül állításunk, mert (4) egész megoldásaiban vagy z is, t is páros, vagy mind a kettő páratlan, így $(3')$ szerint x mellett y is egész.

A (4) egyenletnek csak véges sok egész megoldása lehet, hiszen a bal oldal mindegyik tagja legfeljebb a jobb oldallal lehet egyenlő, így – a z-re már talált alsó korlátot is tekintetbe véve –

$$20\leqq z\leqq 116\qquad |t|\leqq 67. \tag{5}$$

A korlátok meghatározása közben az is kiderül, hogy mindegyik elő is fordul a megoldások közt. Az első $x=1$-re adódott, ekkor $z=20$, $y=11$, $t=-66$. $t=66$-ra x már túl nagynak adódik. Egyáltalán (1) és (3) alapján

$$t\leqq 32. \tag{5'}$$

(4) további, az (5), $(5')$-t kielégítő megoldásai $z=116$, $t=\pm 2$. (A $z=1$, $t=-67$ megoldás nem valódi, mert az egyjegyű számra vezető $x=0$, $y=l$ értékpárt adja.)Innen $x=69$, $y=93$ és $x=65$, $y=91$ adódik. Ezzel 3 megoldást már találtunk, a feladat kívánalmainak tehát eleget tettünk; megkeressük azonban a további megoldásokat is.

A próbálgatások számának csökkentésére felhasználható 13 468 oszthatósága 7-tel és 13-mal, ugyanis így

$$z^2+3t^2-7t^2=(z+2t)(z-2t)$$

is osztható kell hogy legyen 7-tel. Hasonlóan

$$z^2+3t^2-13z^2=3(t+2z)(t-2z)$$

osztható 13-mal. Mivel t-vel együtt $-t$ is megoldása (4)-nek, választhatjuk t előjelét úgy, hogy $z+2t$ legyen 7-tel osztható:

$$z+2t=7c, \tag{6}$$

ahol c alkalmas egész. Továbbá mivel 13 prím és nem osztója 3-nak, kell hogy

$$t+2z=13d_1 \qquad \text{vagy} \qquad t-2z=13d_2 \tag{7}$$

teljesüljön alkalmas egész d_1-gyel, ill. d_2-vel.

Ha a (7) alatti első egyenlőség teljesül, akkor ennek 7-szereséből levonva (6)-nak 13-szorosát:

$$z-19t=91(d_1-c).$$

Mivel z és t egyszerre páros, ill. páratlan, így magyar d_1-c páros. Értékét $2m$-mel jelölve

$$z=19t+182m. \tag{8}$$

Ezt (4)-be helyettesítve 364-gyel egyszerűsíthetünk, és a következő egyenletre jutunk:

$$t^2+19mt+91\mathrm{m}^2-37=0. \tag{9}$$

Ha pedig a (7) alatti második egyenlőség teljesül, akkor ennek 7-szereséhez hozzáadva (6)-nak 13-szorosát:

$$33t-z=91(d_2+c).$$

Itt $d_2+c=2n$ páros szám kell hogy legyen. Így

$$z=33t-182n, \tag{10}$$

és (4) a következő egyenletbe megy át, 364-gyel való egyszerűsítés után:

$$3t^2-33nt+91n^2-37=0. \tag{11}$$

A (9) egyenlet megoldása

$$t=\frac{-19m\pm\sqrt{148-3m^2}}{2}=\frac{-19m\pm D_1}{2},$$

a (11) egyenleté

$$t=\frac{33n\pm\sqrt{444-3n^2}}{6}=\frac{33n\pm D_2}{6}.$$

Az első csak $|m|\leqq\sqrt{148/3}<8$ esetén ad valós megoldást, az utóbbi $|n|\leqq\sqrt{444/3}<13$ esetben. Ez néhány próbálgatást igényel összesen. Csak $|m|=3$, 4, 7, ill. $|n|=1$, 10, 11 jön tekintetbe. A fenti t értékekhez tartozó z értékek (8), ill. (10) alapján

$$z=\frac{3m\pm19D_1}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad z=\frac{-n\pm11D_2}{2}.$$

A (6) egyenlőségnél minden z értékhez t-nek csak azt az előjelválasztását vettük tekintetbe, amelyikre az ebben az egyenlőségben szereplő tényező osztható 7-tel. Hogy az összes megoldást megkapjuk, emellett $-t$-t is tekintetbe kell vennünk. Az így adódó és (5), (5')-t kielégítő megoldásokat az alábbi táblázatok adják. A * azt jelöli, hogy az illető ismeretlenre nem megfelelő érték adódik; az ilyen rovatokat természetesen nem folytattuk.

A (8)-ból adódó megoldások:

m	$\pm D_1$	t	z	x	y
3	11	-23	109	44	77
		23		90	*
-3		-34	100	33	67
4	10	-33	101	34	68
-4		-43	89	24	57
7	1	-66	20	1	11
	-1	-67	1	(0	1)

A (10)-ből adódó megoldások:

n	$\pm D_2$	t	z	x	y
1	21	9	115	76	96
		-9		58	87
-1		-2	116	65	91
		2		69	93
10	12	-57	61	10	36
-10		-53	71	14	43
11	9	-62	44	5	25
-11		-59	55	8	32

A feladat követelményeinek megfelelő összes számok (tízes számrendszerben felírva)

111, 525, 832, 1036, 1443, 2457, 3367 ,3468, 4477, 5887, 6591, 6993, 7696

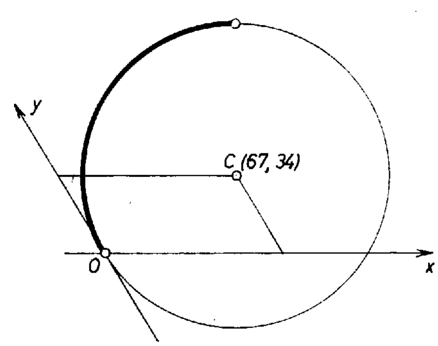
.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (2)-nek $x+y$-nal való osztása útján adódó egyenlet így is alakítható:

$$(x-67)^2+(y-34)^2-(x-67)(y-34)=3367.$$

Ez kör egyenlete abban a (ferdeszögű) koordináta-rendszerben, melynek pozitív féltengelyei 120° szöget zárnak be egymással (egyébként egy P pont x, y koordinátája az az irányított szakasz, melynek kezdőpontja a P-n át az x, y tengellyel párhuzamosan húzott egyenesnek az y, ill. x tengellyel való metszéspontja, végpontja pedig P). Éspedig a kör középpontja a $(67,34)$ pont, és egy kerületi pontja az origó (hiszen az eredeti alakot kielégíti $x=y=0$; a $(0,1)$ pont is rajta van a körön. Minden egyes talált megoldásunknak egy rácspont felel meg a körnek az (1)-et kielégítő ívén. – Ezek alapján a talált különböző megoldások között kapcsolatok fedezhetők fel.



2. A problémát tízes számrendszerben értve az 1967. évi Arany Dániel tanulóverseny egyik feladata adódik (II. forduló 1. feladata a haladók korcsoportjában, az általános tantervű osztályok részére; lásd K. M. L. 35 (1967) 6. o.).