Az összes lehetséges lottóhúzások az $1, 2, \dots, 90$ számok 5-öd osztályú (ismétlés nélküli) kombinációi, számuk

$$N = \binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A feladat feltételeit kielégítő húzások növekvően rendezett lottószámai közül az első hármat e, m, h-val jelölve számoljuk meg azoknak az előírt tulajdonságú húzásoknak a számát, amelyekben h egy adott érték. Mivel $e < m$, $h = e + m$, és h után még két lottószám következik, így $3 \leqq h \leqq 88$. A h utáni két szám a h-nál nagyobb lottószámok közül $\binom{90-h}{2}$-féleképpen választható, és minden ilyen párhoz e a h-nál kisebb számok közül úgy, hogy $m = h - e \geqq e + 1$ legyen, azaz $2e \leqq h - 1$. Így e lehetséges értékeinek száma $\left[\frac{h-1}{2}\right]$, és az adott h-t tartalmazó, a feltételeket kielégítő húzásoké

$$K_h = \left[\frac{h-1}{2}\right] \cdot \binom{90-h}{2},$$

az összes megfelelő húzásoké pedig ezek K összege a $3 \leqq h \leqq 88$ értékekre.

$\left[\frac{h-1}{2}\right]$ értéke j, ha $h = 2j + 1$ és ha $h = 2j + 2$ $(1 \leqq j \leqq 43)$, és az egy j értékhez tartozó tagpár összege

$$j\left\{\binom{89-2j}{2} + \binom{88-2j}{2}\right\} = j\frac{(88-2j)(89-2j+87-2j)}{2} =$$
$$= 4j(44-j)^2 = 4(j^3 - 88j^2 + 1936j).$$

Ezt összegezve $j = 1, 2, \dots, 43$-ra és felhasználva, hogy az első n természetes szám, négyzetszám, ill. köbszám összege rendre $n(n+1)/2, n(n+1)(2n+1)/6$, ill. $n^2(n+1)^2/4$, kapjuk, hogy

$$K = 44 \cdot 43 \cdot \left(44 \cdot 43 - 88 \cdot 2 \cdot 29 + 2 \cdot 44^2\right) = 1\ 248\ 720.$$

Így pedig a kérdéses valószínűség

$$p = \frac{K}{N} = \frac{1\ 248\ 720}{43\ 949\ 268} \approx \frac{1}{35} = 0{,}028.$$

Feladatunk második felére áttérve határozzuk meg először a

$$K'_h = \frac{h-1}{2}\binom{90-h}{2}$$

számok között a legnagyobbat.

$$K'_{h+1} - K'_h = \frac{h}{2} \cdot \frac{(89-h)(88-h)}{2} - \frac{h-1}{2} \cdot \frac{(90-h)(89-h)}{2} =$$
$$= \frac{89-h}{4}\left(88h - h^2 - 90h + 90 + h^2 - h\right) = \frac{3}{4}(89-h)(30-h).$$

Emiatt $K'_{h+1} > K'_h$, ha $h < 30$, $K'_{h+1} < K'_h$, ha $h > 30$, tehát a K'_h számok között K'_{30} és K'_{31} a legnagyobb, és $K'_{30} = K'_{31}$. Láttuk, hogy ha h páratlan, $K_h = K'_h$, ha pedig h páros, $K_h < K'_h$, tehát a K_h számok között K_{31} a legnagyobb. A vizsgált húzások között tehát 31 a harmadik szám leggyakoribb értéke.

Martoni Viktor

Megjegyzések. 1. A magyar lottójáték 1969 végéig tartott 672 húzásában 16-szor lépett fel a vizsgált egyenlőség. A $16/672 = 1/42 \approx 0{,}024$ hányados elég jó megegyezésben van számításunk eredményével.

Az említett 16 eset viszont még nagyon kevés ahhoz, hogy a harmadik szám gyakoriságára valami törvényszerűséget mutasson. Az előfordult harmadik számok, növekedően rendezve: 7, 12, 13, 15, 15, 15 (két esetben $7 + 8$ alakban), 26, 32, 33, 36, 41, 45, 64, 65, 67, 73. A statisztikában használt medián (aminél ugyanannyi adat nagyobb, mint amennyi kisebb) 32 és 33 között van.

2. Azt az esetet vizsgáltuk, amelyben a $k_3 = h-(e+m)$ különbség 0. A 672 húzás között 354 esetben volt k_3 pozitív, 302 esetben negatív, legnagyobb előfordult értéke 60, a legkisebb -62. k_3 néhány 0 körüli értékének előfordulási száma:

$k_3 =$	+1,	+2,	+3,	+4,	+5,	+6,	+7,	+8,	+9,	+10,
	14,	22,	18,	13,	16,	18,	11,	18,	13,	13;
$k_3 =$	−1,	−2,	−3,	−4,	−5,	−6,	−7,	−8,	−9,	−10,
	16,	18,	16,	18,	17,	10,	11,	11,	10,	15.