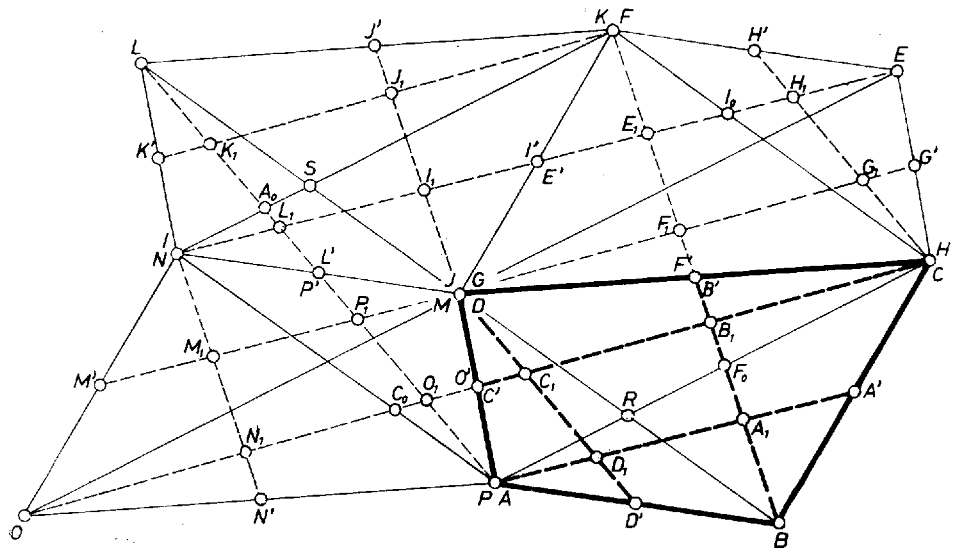
Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget a B' pontra, kapjuk az $EFGH$ négyszöget (1. ábra), ahol G azonos D-vel, H azonos C-vel.



1. ábra

Állítsuk elő az új négyszögben az E', F', G', H' és E_1, F_1, G_1, H_1 pontokat ugyanúgy, mint az eredeti négyszög megfelelő pontjait. Az új négyszöget E'-re tükrözve kapjuk az $IJKL$ négyszöget (J a D_2-vel, K az F-fel azonos), és ebben hasonlóan állítsuk elő a további 4–4 pontot, végül ezt a négyszöget L'-re tükrözve az $MNOP$ négyszöget kapjuk (M a D-vel, N a J-vel azonos).

Mivel D-ben az eredeti négyszögnek mind a négy szöge fellép, az MP egyenes azonos DA-val, a tükrözések miatt $AD = EH = IL = MP$, tehát P és A is azonos, és utolsó négyszögünk az eredetiből C'-re való tükrözéssel is előállítható.

A $B_1E_1L_1O_1$ négyszög T_2 területe egyenlő $(T - T_1)$-gyel, hiszen e négyszögnek az előbbi négy négyszögbe eső darabjai rendre egybevágóak az eredeti $ABCD$ négyszög T_1-en kívüli részének rendre egy-egy darabjával. Az $ACFI$ négyszög oldalai rendre párhuzamosak az eredeti négyszög megfelelő átlóival, ez tehát paralelogramma, és területe az eredeti négyszög területének kétszerese: $P = 2T$

Jelöljük a B_1E_1, E_1L_1, L_1O_1, O_1B_1 egyenesnek az AC, CF, FI, IA oldalon levő pontját rendre F_0, I_0, A_0, C_0-lal, az AC, BD átlók metszéspontját R-rel, és legyen

$$p = \frac{AR}{AC}; \qquad q = \frac{RC}{AC}; \qquad r = \frac{DR}{DB}; \qquad s = \frac{RB}{DB}; \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{IA_0}{IF}; \qquad \beta = \frac{AC_0}{AI}; \qquad \gamma = \frac{CF_0}{CA}; \qquad \delta = \frac{FI_0}{FC} \tag{2}$$

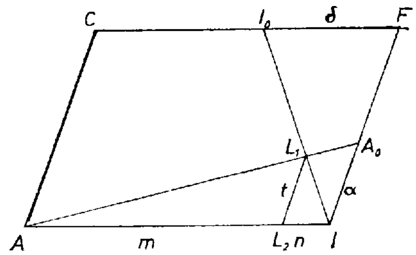
Ekkor $p + q = 1$, $r + s = 1$. Legyen még IF és DL metszéspontja S. Az A_0SL, ARL háromszögek hasonlóak, emiatt

$$A_0S : SL = AR : RL,$$
$$SL \cdot AR = A_0S \cdot RL$$
$$\frac{SL}{BD} \cdot \frac{AR}{AC} = \frac{A_0S}{AC} \cdot \frac{RL}{BD},$$

$$r \cdot p = (p - \alpha)(1 + r),$$
$$\alpha = \frac{p}{1 + r}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\beta = \frac{r}{1 + q}, \qquad \gamma = \frac{q}{1 + s}, \qquad \delta = \frac{s}{1 + p}. \tag{3}$$



2. ábra

Az L_1-en át AC-vel párhuzamosan húzott egyenes messe AI-t L_2-ben, és legyen (2. ábra)

$$\frac{L_1L_2}{AC}=t;\qquad \frac{AL_2}{AI}=m;\qquad \frac{L_2I}{AI}=n.$$

Az AL_1L_2 és AA_0I hasonló háromszögek alapján $t=m\alpha$, hasonló módon kapjuk, hogy $t=\dfrac{n}{\delta}$, ezek alapján

$$t=\frac{\alpha}{1+\delta\alpha}.$$

Az $ACFI$ és AL_1I idomok területének aránya tehát:

$$\frac{T_{ALI_1}}{P}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\delta\alpha}.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$\frac{T_{CO_1A}}{P}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{1+\alpha\beta},\qquad \frac{T_{FB_1C}}{P}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma}{1+\beta\gamma},\qquad \frac{T_{IE_1F}}{P}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{1+\gamma\delta}.$$

Jelöljük e négy háromszög területének összegét Q-val akkor

$$\frac{2Q}{P}=\frac{\alpha}{1+\delta\alpha}+\frac{\beta}{1+\alpha\beta}+\frac{\gamma}{1+\beta\gamma}+\frac{\delta}{1+\gamma\delta}. \tag{4}$$

Fenti összefüggéseink alapján $P=2T$, $Q=P-T_2=P-T+T_1=T+T_1$ így

$$\frac{2Q}{P}=\frac{2T+2T_1}{2T}=1+\frac{T_1}{T}.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy

$$1+\frac{1}{6}\leqq\frac{2Q}{P}\leqq 1+\frac{1}{5}. \tag{5}$$

(3) és (4) alapján

$$\frac{2Q}{P}=\frac{p(p+1)}{sp+(p+1)(r+1)}+\frac{r(r+1)}{pr+(r+1)(q+1)}+\frac{q(q+1)}{rq+(q+1)(s+1)}+\frac{s(s+1)}{qs+(s+1)(p+1)}.$$

Avégett, hogy ezt a kifejezést könnyebben tudjuk kezelni, vezessük be új változóknak az egyes nevezőkben álló kifejezéseket. Mivel $p+q=r+s=1$, ezek értéke:

$$\begin{aligned} 1+2p+r&=5x,\\ 1+2r+q&=5y,\\ 1+2q+s&=5u,\\ 1+2s+p&=5v. \end{aligned} \tag{6}$$

Új változóinkkal a régieket kifejezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p+1&=2x+v, &\qquad p&=2x-y,\\ r+1&=2y+x, & r&=2y-u,\\ q+1&=2u+y, & q&=2u-v,\\ s+1&=2v+u, & s&=2v-x. \end{aligned} \tag{7}$$

Ezek alapján

$$\frac{2Q}{P}=\frac{(2x+v)(2x-y)}{5x}+\frac{(2y+x)(2y-u)}{5y}+\frac{(2u+y)(2u-v)}{5u}+\frac{(2v+u)(2u-x)}{5v}=$$
$$=\frac{4}{5}(x+y+u+v)-\frac{1}{5}\left(\frac{vy}{x}+\frac{xu}{y}+\frac{yv}{u}+\frac{ux}{v}\right)=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{vy}{xu}+\frac{xu}{vy}\right).$$

Közben többször használtuk, hogy $x+u=y+v=1$, ami (6)-ból közvetlenül látható. (5) alapján azt kell belátnunk, hogy

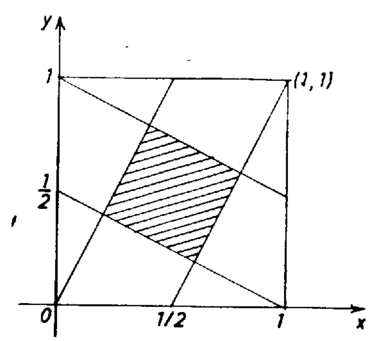
$$2\leqq\frac{vy}{xu}+\frac{xu}{vy}\leqq\frac{16}{3}. \tag{8}$$

A bal oldal könnyen belátható, hiszen x, y, u, v pozitívak, így pozitív a $\frac{vy}{xu}$ szám is, és egy pozitív számnak és reciprokának az összege valóban legalább 2. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a mondott hányados 1-gyel egyenlő; ez a helyzet pl. ha az eredeti négyszög négyzet. A jobb oldali egyenlőtlenség pedig abból fog következni, hogy megmutatjuk, $\frac{vy}{xu}$ szám $\frac{2}{3}$ és $\frac{3}{2}$ között van. $\frac{3}{2}$-hez tetszőleges közeli értéket kapunk pl., ha a négyszög egyik oldala elég kicsi a többihez képest.

Mivel $0\leqq p\leqq 1$, $0\leqq r\leqq 1$, (7) alapján kapjuk, hogy az x, y értékek a

$$\begin{aligned}&0\leqq 2x-y\leqq 1,\\ &0\leqq 2y-x-1\leqq 1\end{aligned} \tag{9}$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományban vannak, melyet az x, y síkon a 3. ábra mutat be.



3. ábra

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ezen a tartományon

$$\frac{2}{3}\leqq\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\leqq\frac{3}{2}.$$

Mivel x és y szerepét felcserélve a kifejezés értéke saját reciprokába megy át, és a vizsgált tartomány egy hasonló típusú tartományba, elegendő például a jobb oldalt bebizonyítanunk. Rögzített x értékek mellett a kifejezés értéke annál nagyobb, minél messzebb van y értéke 1/2-től1, a kifejezés legnagyobb értékét tehát a tartomány határán kapjuk. Például az $y=2x$ egyenesen a kifejezés értéke

$$\frac{2x(1-2x)}{x(1-x)}=4-\frac{2}{1-x},$$

ami x-ben monoton változik. így szélső értékeit a vizsgált szakasz végpontjaiban veszi fel: $x=\frac{1}{5}$, illetve $x=\frac{2}{5}$ mellett, ekkora kifejezés értélre $\frac{3}{2}$, illetve $\frac{2}{3}$ Hasonló módon kapjuk, hogy a kifejezés értéke a többi oldalszakaszon is monoton változik, és a másik két csúcsban is $\frac{3}{2}$, illetve $\frac{2}{3}$ az értéke, állításunkat ezzel bizonyítottuk.