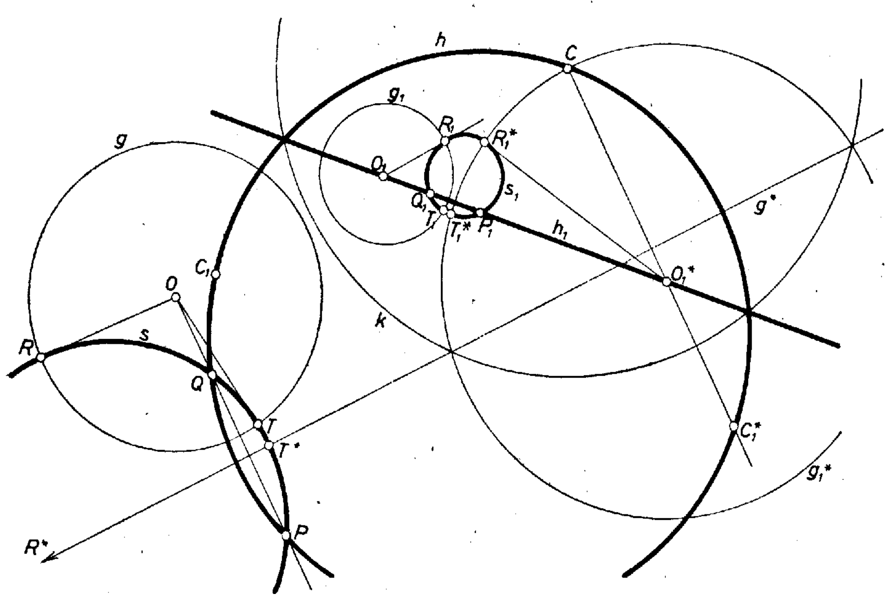
I. Feltehetjük, hogy P és Q különböző pontok, hiszen ha azonosak, az állítás nyilvánvaló. Legyen s a P, Q pontokon átmenő, tetszőleges kör, és jelöljük g-vel alkotott metszéspontjait R-rel, T-vel. (Mivel g elválasztja a P, Q pontokat, R és T mindig létrejön.) Az s kört g-re invertálva P és Q pontja felcserélődik, az R, T pontok helyükön maradnak, így s is önmagába megy át. Az OR, OT egyeneseken s-nek csak egy-egy pontja lehet (O a g kör középpontja), így ezek az egyenesek érintik s-t, s és g tehát merőlegesen metszik egymást.



Hasonló állítás igaz, ha g egyenes (a továbbiakban a megfelelő egyenest – az egyértelműség kedvéért – g^*-gal jelöltük), hiszen ha s átmegy a g^*-ra szimmetrikus P, Q pontokon, akkor középpontja g^*-on van, vagyis g^* és s merőlegesek.

A P, Q pontokon átmenő tetszőleges s kör tehát merőleges g-re. (Ezek közé a körök közé sorolhatjuk a PQ egyenest is, ez nyilvánvalóan merőleges g-re.)

Vigye át a C középpontú k körre vonatkozó inverzió s-et s_1-be, az R, T pontokat R_1, T_1-be. Mivel az inverzió szögtartó, s_1 is merőleges lesz g_1-re, így O_1R_1, O_1T_1 érintik s_1-et (O_1 a g_1 középpontja). (Hasonló állítás igaz a g^* egyeneshez tartozó R^*, T^* metszéspontok R_1^*, T_1^* inverzére is: a g_1^* kör is merőlegesen metszi s_1-et, tehát $O_1^*R_1^*$, $O_1^*T_1^*$ is érinti s_1-et, ahol O_1^* a g_1^* kör középpontját jelöli.) Az s_1 kört g_1-re invertálva, önmagába megy át, hiszen R_1, T_1 pontjai helyükön maradnak, és az inverz képnek is merőlegesen kell metszenie g_1-et.

Állításunk tetszőleges, a P_1, Q_1 pontokon átmenő s_1 körre igaz, hiszen ha egy tetszőlegesen felvett s_1 körből indulunk ki, és ezt invertáljuk k-ra, a kapott s kör – vagy egyenes – átmegy a P, Q pontokon. Ezek szerint a P_1, Q_1 pontokon átmenő köröket g_1-re invertálva, azok mindegyike önmagába megy át. Ez az inverzió a körök egyik közös pontját, a P_1-et csak olyan pontba viheti, amelyik mindegyik körön rajta van, tehát P_1 képe Q_1, amint azt bizonyítani akartuk. (P_1 képe nem lehet önmaga, hiszen P_1 nincs rajta g_1-en, mint ahogy P sincs rajta g-n.)

Bizonyításunknak ez az utolsó része változtatás nélkül mondható el a g_1^* körre is, feladatunk állítását tehát bebizonyítottuk.

II. Legyen h a P, Q, C pontok által meghatározott kör vagy egyenes (tehát h a PQ egyenes, ha C rajta van PQ-n, és h a P, Q, C pontokon átmenő kör, ha ezek nincsenek egy egyenesen). Mint a P, Q pontokon átmenő körök mindegyike, h is merőlegesen metszi g-t (és g^*-ot is). Emiatt h-nak k-ra vonatkozó h_1 inverze is merőlegesen metszi g_1-et (és g_1^*-ot is). Az O_1 (és O_1^*) pont tehát rajta van h_1-en. Másrészt h-t g-re invertálva (illetve g^*-ra tükrözve) önmagába megy át, a C pont g-re vonatkozó C_1 inverze (illetve g^*-ra vonatkozó C_1^* tükörképe) szintén rajta van h-n, és a k-ra vonatkozó invertálás épp ezeket viszi az O_1, O_1^* pontokba, tehát a P.12. feladat állítását is bebizonyítottuk.

Vajnági András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)