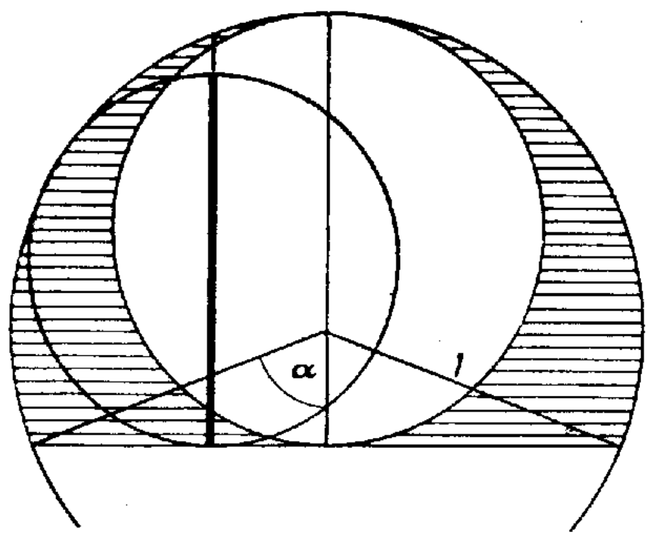
A kör sugarát 1-nek választjuk, és a kérdéses húrt a hozzá tartozó $2\alpha(<\pi)$ középponti szöggel határozzuk meg. A szeletbe beírt – vagyis mind a húrt, mind az ívet érintő – kör átmérője nem lehet nagyobb, mint a húrra az érintkezési pontban állított merőlegesnek a szeletbe eső szakasza. Ez a szakasz akkor a legnagyobb, ha rajta van a szelet szimmetriatengelyén, és ebben a helyzetben a szakasz, mint átmérő fölé írt kör egyszersmind maga a beírt kör; ezt kell tehát tekintenünk.



A körszelet területe $\pi-(\alpha-\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha)$, a beírt kör területe $\pi(1+\cos\ \alpha)^2/4$, ezekből a kérdéses terület kifejezése így alakítható:

$$t=\frac{3\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{2}\cos\ \alpha-\frac{\pi}{4}\cos^2\ \alpha+\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha.$$

A kívánt maximumot a derivált eltűnése alapján keressük.

$$\begin{aligned}t'&=-1+\frac{\pi}{2}\sin\ \alpha+\frac{\pi}{2}\sin\ \alpha\ \cos\ \alpha+\cos^2\ \alpha-\sin^2\ \alpha=\\&=\frac{\pi}{2}\sin\ \alpha\left(1+\cos\ \alpha-\frac{4}{\pi}\sin\ \alpha\right)=\\&=\frac{\pi}{2}\sin\ \alpha\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{8}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\\&=\pi\sin\ \alpha\ \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{4}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

Ennek az első két (változó) tényező eltűnéséből adódó zérushelyei számunkra. érdektelenek: $\sin\ \alpha=0$ esetén $\alpha=0$, a húr hossza 0, a szelet azonos az adott körrel, a beírt kör ezt egészen kitölti, a vizsgált terület 0; $\cos\alpha/2=0$ gyöke pedig nem a figyelembe vett tartományba esik. A zárójeles tényező akkor és csak akkor tűnik el, ha

$$\text{tg}\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}5708. \qquad (1)$$

Ezen a helyen a derivált csökkenve halad át, mert a zárójelben $\cos\alpha/2$ csökken, ugyanígy a második tag is, hiszen $\sin\alpha/2$ növekvő, az elöl álló tényezők pedig pozitívok. Eszerint az (1)-gyel meghatározott szög esetében a vizsgált területnek maximuma van.

A maximum helyén a húr hossza

$$2\sin\alpha=\frac{4\ \text{tg}\ \alpha/2}{1+\ \text{tg}^2\ \alpha/2}=\frac{16\pi}{16+\pi^2}\approx 1{,}943$$

($\alpha=76^\circ\ 17{,}5'$).

Vajnági András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)