Az

$$f_1(x) = f(x) = ax^2 + bx + c$$

másodfokú függvényből kiindulva az

(2) $$f_{i+1}(x) = f\big(f_i(x)\big) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

rekurzióval egy függvénysorozatot képezünk. Ha az

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$$

számok eleget tesznek (1)-nek, akkor

(3) $$x_{i+1} = f_i(x_1), \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

és így x_1 gyöke az

(4) $$f_n(x) = x$$

egyenletnek. Megfordítva: a (4) egyenlet tetszőleges gyökét véve x_1 nek, az $x_2, \ldots, x_{n+1}$ számokat pedig (3) alapján definiálva, az (1) rendszer egy megoldásrendszerét kapjuk.

Könnyíti az áttekintést, ha az $f(x)$ függvényt olyan szakaszon vizsgáljuk, ahol értékkészlete és értelmezési tartománya azonos: ez a közös halmaz lesz a (2) rekurzióval definiált függvények értelmezési tartománya is. Emiatt választjuk az

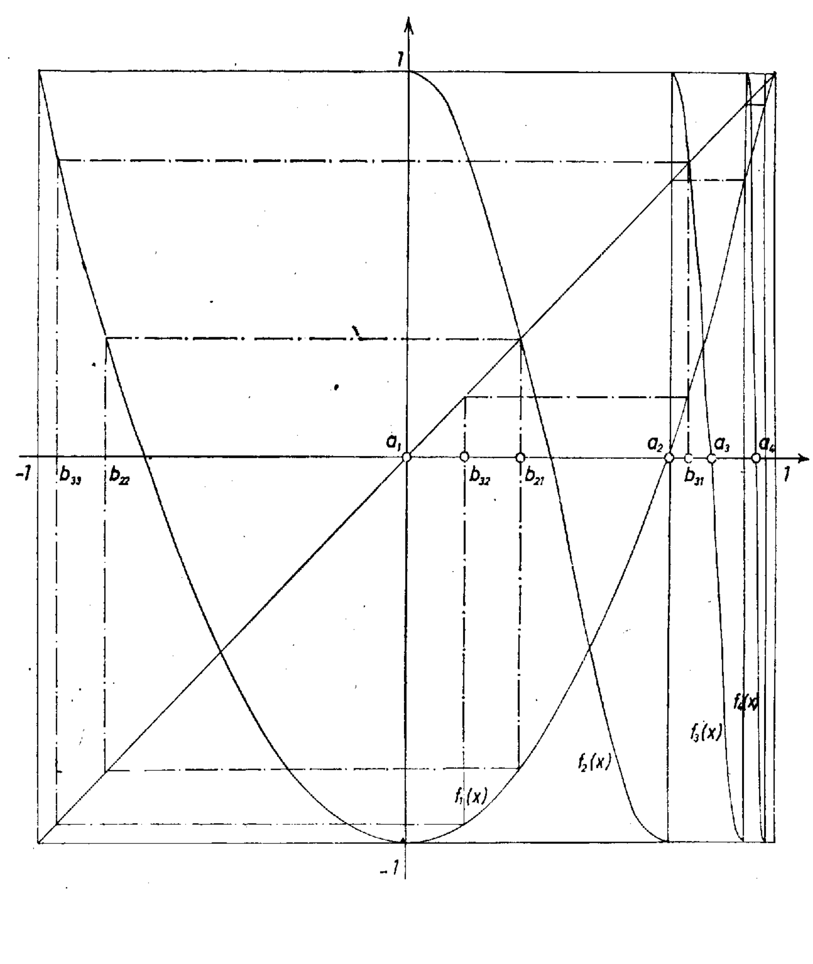
(5) $$f(x) = f_1(x) = 2x^2 - 1$$

függvényt, mely a $(-1, 1)$ zárt intervallumot önmagára képezi le. Megmutatjuk, hogy (5)-ből kiindulva és (2) szerint állítva elő az $f_n(x)$ függvényt, a kapott (4) egyenletnek legalább három gyöke van, tehát $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$ megfelelő együtthatók.

A (4) egyenlet nyilvánvaló gyöke az

$$f(x) = x$$

egyenlet két gyöke, az $A = -1/2$, és a $B = 1$ szám, így egyetlen további gyök létezését kell kimutatnunk.



Az (5) függvény a $(0,1)$ zárt szakaszon monoton nő -1-től $+1$-ig, így egyértelműen meghatározott a $[-1,1]$ számközben az a φ függvény, amely az x számhoz azt a számot adja meg, amelyre f értéke x (ezt a függvényt nevezzük f inverzének). A φ függvény a $[-1,1]$ zárt szakaszbeli számokhoz a $[0,1]$ zárt szakasz számait rendeli hozzá, az előbbi szakaszt az utóbbira képezi le. Az $a_1=0$ értékből kiindulva képezzük az

(6) $$a_{i+1}=\varphi(a_i) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

rekurzióval az a_i sorozatot. Mivel a $\varphi(x)$ függvény is monoton nő, és értékkészlete a $(0,1)$ zárt intervallum,

(7) $$0=a_1<a_2<\ldots<a_i<\ldots\leqq 1.$$

A φ függvény a $(-1,\ 0)$ szakaszt az $(a_1,\ a_2)$ szakaszra, ezt a szakaszt az $(a_2,\ a_3)$ szakaszra képezi le, és általában az $(a_i,\ a_{i+1})$ intervallumot a szomszédos $(a_{i+1},\ a_{i+2})$ intervallumba viszi, hiszen monotonitása miatt ha

$$a_i<x<a_{i+1}$$

akkor

$$\varphi(a_i)<\varphi(x)<\varphi(a_{i+1}).$$

Emiatt, ha az $f_n(x)$ függvényt csak az $(a_n,\ a_{n+1})$ zárt szakaszon tekintjük, azt ez a függvény, mivel a φ függvény inverzének n-szer egymás után való alkalmazását jelenti, a $(-1,\ 1)$ zárt szakaszra képezi le. Nevezetesen

(8) $$f_n(a_n)=1, \qquad f_n(a_{n+1})=-1,$$

ami f_n és a_n definíciójából teljes indukcióval közvetlenül következik, pl.:

$$f_n(a_n)=f_{n-1}\big(f(a_n)\big)=f_{n-1}(a_{n-1})=1.$$

Hasonlóan indukcióval kapjuk, hogy az $f_n(x)$ függvény az $(a_n,\ a_{n+1})$ szakaszon monoton fogy, tehát átmetszi az $y=x$ egyenest. A kapott metszéspont abszcisszája lesz a (4) egyenlet keresett harmadik gyöke.

Göndőcs Ferenc

Megjegyzés. Az ábrán feltüntettük a (4) egyenlet $n=2$-höz tartozó b_{21} és $n=3$-hoz tartozó b_{31} gyökét, továbbá az (1) egyenletrendszer megfelelő b_{21}, b_{22}, ill. b_{31}, b_{32}, b_{33}, gyökrendszerét is.