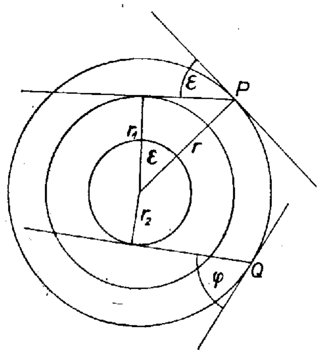
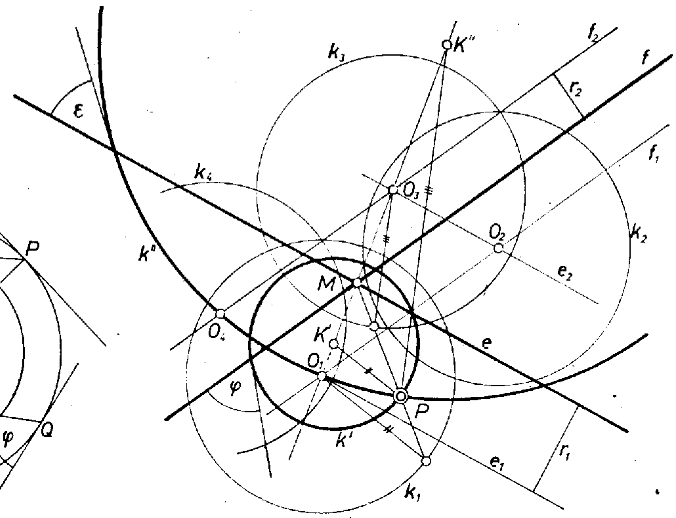
I. megoldás. Tegyük fel először, hogy e és f metszik egymást az M pontban. Legyen k tetszőleges, r sugarú kör, középpontja O, és P a kerületének tetszőleges pontja. A k-hoz P-ben húzott érintővel ε szöget bezáró (P-n átmenő) egyenes O-tól mért r_1 távolsága független P és az egyenes megválasztásától, hiszen r átfogójú, ε hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög ε melletti befogója. Hasonlóan legyen r_2 a k-t φ szögben metsző egyenesek O-tól mért távolsága (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Egy r sugarú kör tehát akkor és csakis akkor metszi e-t ε, f-et φ szögben, ha középpontja e-től r_1, f-től r_2 távolságra van. Négy ilyen pont van: az e-től r_1 távolságra haladó e_1, e_2 és az f-től r_2 távolságra haladó f_1, f_2 egyenesek által meghatározott paralelogramma csúcsai, legyenek ezek O_1, O_2, O_3, O_4. Tehát e négy pont körül r sugarú köröket rajzolva azok e-t ε, f-et φ szög alatt metszik; jelöljük ezeket k_1, k_2, k_3, k_4-gyel (2. ábra).

Ha M centrumú hasonlósággal a kapott köröket újabb körökbe visszük át, ezek az újabb körök is a megfelelő szögben metszik az egyeneseinket. Ilyen hasonlósággal pedig el tudjuk érni, hogy a körök P-n menjenek át. Annyi megfelelő kört kapunk, ahány metszéspont keletkezik az MP egyenesen, illetve az M-re való szimmetria miatt ezek a körök párosával megegyeznek, a megoldások száma tehát egyenlő a k_1 és k_2 köröknek az MP egyenesen levő metszéspontjainak a számával, ami 4, 3 vagy 2 lehet.

Ha e és f párhuzamosak, és egy kör a megfelelő szögben metszi őket, akkor a kör középpontjának a tőlük mért távolságainak aránya megegyezik $r_1 : r_2$-vel. E távolságok tehát, ha e és f távolsága d,

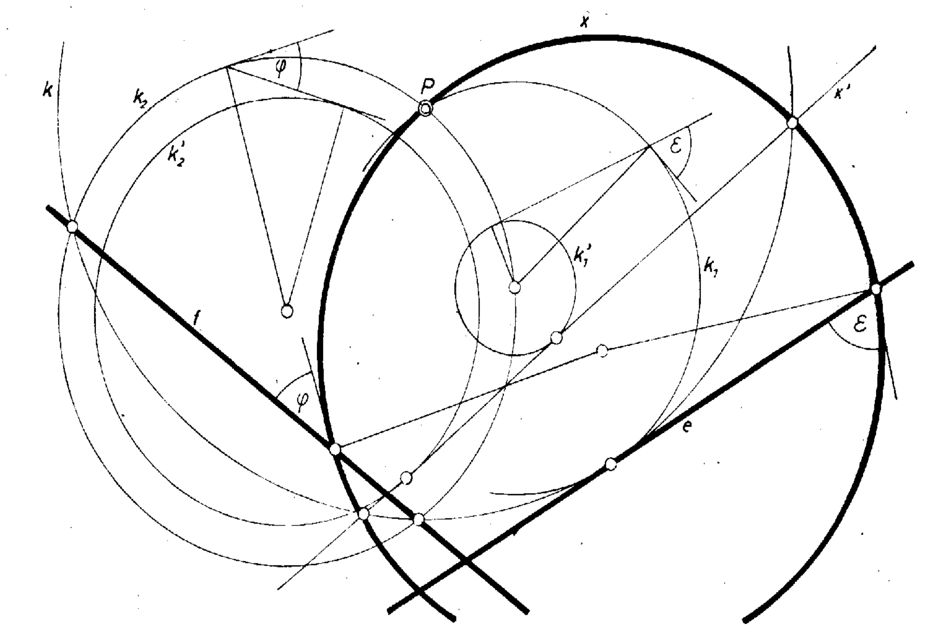
$$\frac{r_1 d}{r_1 + r_2}, \qquad \frac{r_2 d}{r_1 + r_2} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{r_1 d}{r_1 - r_2}, \qquad \frac{r_2 d}{r_1 - r_2}$$

aszerint, hogy a középpont a két egyenes között van-e vagy sem. (Itt feltettük, hogy $\varepsilon < \varphi$; az $\varepsilon = \varphi$ esetben természetesen csak a két egyenes között lehet a középpont.) Ezek alapján szerkeszthetünk olyan köröket, amelyek az egyeneseket az adott szögben metszik, majd az e, f egyenesekkel párhuzamosan eltolva őket, elérhetjük, általában 2-féleképpen, hogy P-n is átmenjenek.

Beck József

II. megoldás. Legyen k tetszőleges kör, melynek P a középpontja. k-ra invertálva[1] az e, f egyenesek P-n átmenő k_1, k_2 körökbe mennek át, a keresett kör pedig olyan egyenesbe, mely k_1-et ε, k_2-t φ szögben metszi. A k_1-et ε szögben metsző egyenesek mind érintik a k_1-gyel koncentrikus k_1' kört (melyet tehát egy k_1-et ε szögben metsző, de különben tetszőlegesen felvett egyenes segítségével szerkeszthetünk meg). Hasonlóképpen kapjuk k_2-ből a k_2' kört: a keresett kör x' inverze tehát a k_1' és k_2' körök közös érintője, melyet k-ra invertálva megkapjuk a keresett x kört (3. ábra, a következő oldalon).

[1]Lásd: *Surányi János-Tusnády Gábor:* Az inverzióról, K. M. L. 37 (1968) 97–101. o.



3. ábra

Mivel két kör közös érintőinek száma 4, 3, 2, 1 vagy 0, ennyi a keresett körök száma is.

Horváth Miklós (Veszprém, Lovassy L. Gimn., I. o. t.)