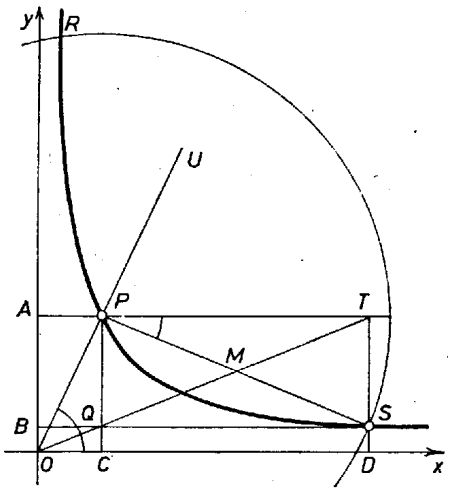
S-sel a P körüli, $2PO$ sugarú körnek és a hiperbolának azt a metszéspontját jelöljük, amely a PT egyenes és az x tengely közé esik. Húzzunk párhuzamost P-n és S-en át az Ox és Oy tengellyel. Az előbbivel párhuzamos egyenesek messék az y-tengelyt rendre A-ban és B-ben, az utóbbival párhuzamosak az x-tengelyt C-ben, ill. D-ben; BS és CP, ill. AP és DS metszéspontját jelöljük Q, ill. T-vel, a $PQST$ téglalap középpontját M-mel, OP-nek egy P-n túli pontját U-val.



A bizonyítás azon fog múlni, hogy megmutatjuk: O, Q és T egy egyenesen van. Az, hogy P és S a hiperbolán van, azt jelenti, hogy az $AOCP$ és $BODS$ téglalap területe egyenlő, s így az $ABQP$ és $CDSQ$ téglalapé is. Messe az OQ egyenes AP-t T'-ben és jelöljük ennek merőleges vetületét BS-en T''-vel, OD-n T'''-vel. Megmutatjuk, hogy ezek egybeesnek T-vel, S-sel, ill. D-vel. Valóban, a következő idompárok egyenlő területűek: az OBQ és OCQ háromszögek, az $ABQP$ és $CDSQ$ négyszögek, a PQT' és $T''QT'$ háromszögek. Így az AOT' háromszög területe egyenlő a $T''SDOT'$ idoméval, de nyilvánvalóan egyenlő a $T'''OT'$ háromszögével is. Ez csak úgy lehet, ha a $T'T'''$ egyenes egybeesik TD-vel.

Mivel a téglalap átlói felezik egymást és egyenlők, a szerkesztést is figyelembe véve

$$TM = PM = \frac{1}{2}PS = PO,$$

tehát az OPM és PMT háromszögek egyenlő szárúak, alapon levő szögeik egyenlők. Alkalmazva rájuk a külső szög tételét

$$UPM\sphericalangle = MOP\sphericalangle + OMP\sphericalangle = 2OMP\sphericalangle,$$
$$OMP\sphericalangle = PTM\sphericalangle + TPM\sphericalangle = 2TPM\sphericalangle.$$

Így a harmadolandó szögre

$$POx\sphericalangle = UPT\sphericalangle = UPM\sphericalangle - TPM\sphericalangle = 2OMP\sphericalangle - TPM\sphericalangle = 3TPM\sphericalangle = 3TPS\sphericalangle.$$

Ezzel a szerkesztés helyességét igazoltuk.

Vajnági András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)