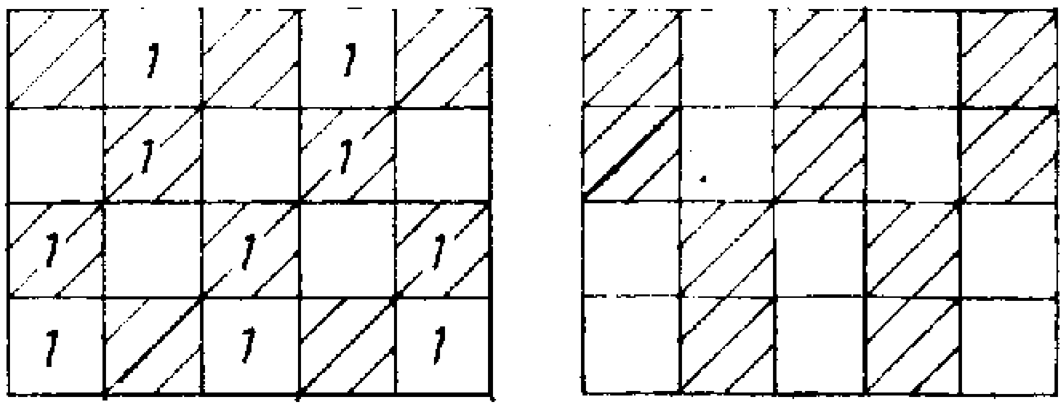
A P. 26. problémában[1] láttuk, hogy a $4 \times k$ méretű sakktáblának ($k \geq 3$, $k \neq 4$) lóugrással való bejárása csak úgy lehetséges, ha először egyik olyan résztartományát járjuk be, melyet a szélső sorok valamelyik színű mezői és a belső sorok ellentétes színű mezői alkotnak. Továbbá az egyik résztartományból a másikba való átlépés csak két belső mező közt lehetséges, és a bejárás kezdő- és végpontja szélső mezőn van.

Nem nehéz ezek ismeretében bejárási útvonalat kijelölni adott k esetére, ezért csak olyan utasítás tekinthető érdekesnek, amely minden k-ra érvényes, legalábbis valahonnan kezdve. Alább három ilyen bejárási utasítást adunk. Az 1. ábra színezése a tábla két résztartományát mutatja $k = 5$ esetére.

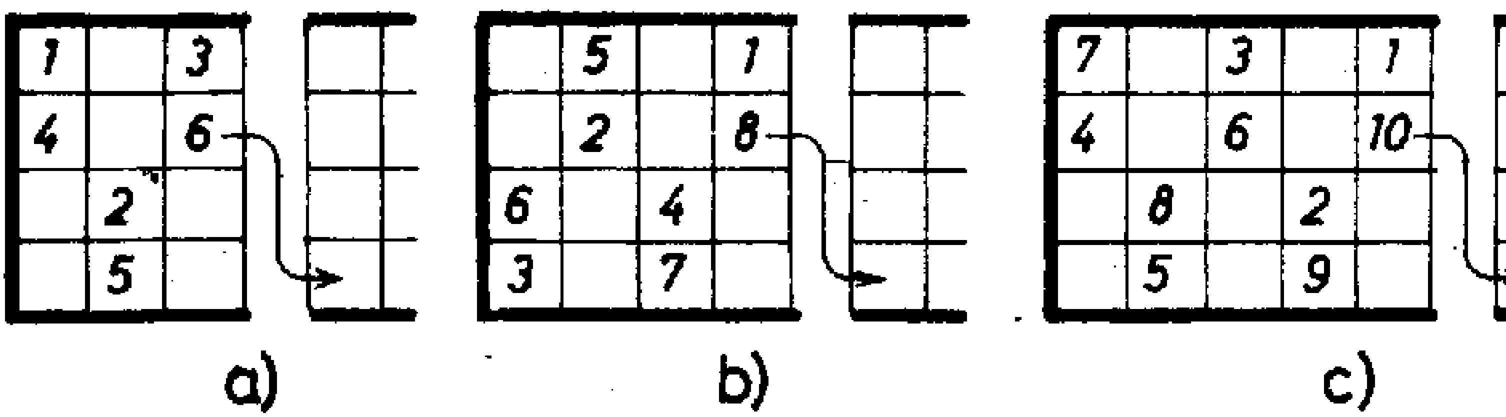


1. ábra

I. A táblát jobbról bal felé 4×3 mezőnyi szelvényekre osztjuk, a balról esetleg maradó 1 vagy 2 oszlopot a velük szomszédos szelvényhez csatoljuk. Az első résztartomány bejárásában balról jobbra és szelvényről szelvényre haladunk. Az 1. szelvényt a $2a$, $2b$, illetve $2c$ ábra szerint járjuk be a számok sorrendjében, k-nak $3j$, $3j+1$, illetve $3j+2$ alakja szerint. A 2. szelvényt már egységesen bal alsó mezején kezdjük, a $2a$ ábrának a tábla hosszanti tengelyére vett tükörképe szerint járjuk be, majd váltakozva $2a$-t és a tükörképét alkalmazzuk.

Sétánk felében, az utolsó szelvényben résztartományváltással a $2d$ ábra (vagy a tükörképe) szerint meg tudunk fordulni (a betűk rendjében), az előtte álló szelvényből pedig addigi útvonalunk tükörképén térünk vissza.

Eljárásunk $k = 3$ és $k \geq 6$ esetére használható.

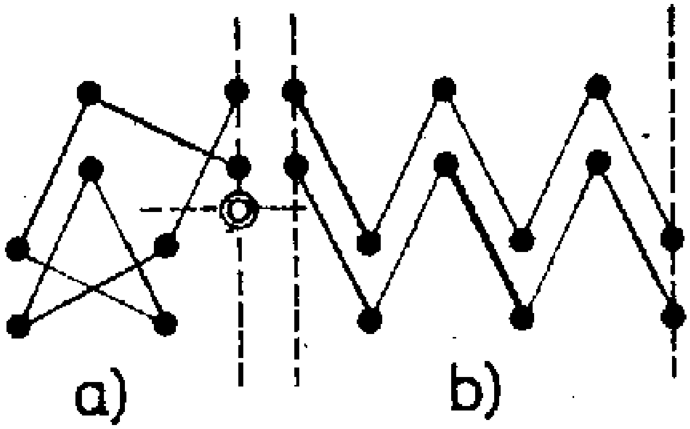


2. ábra

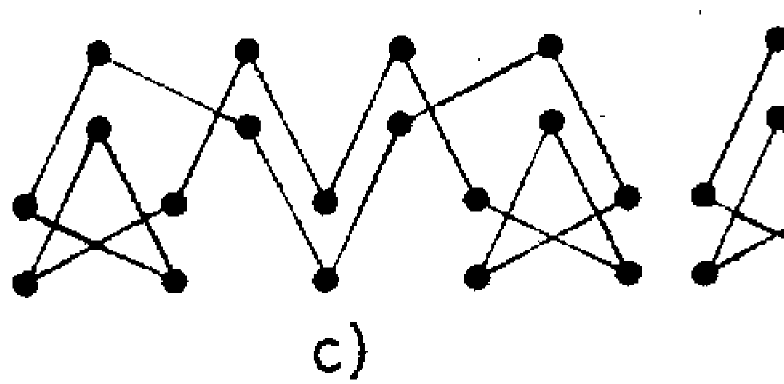
II. Elég megadni az egyik tartomány egy záródó bejárását. Ha ugyanis egy ilyen bejárás van, akkor a másik tartomány egy bejárását kapjuk, ha az első bejárását tükrözzük a tábla két belső sorát elválasztó szimmetriatengelyre. Ezután egy olyan lépést veszünk, amely belső sorból belső sorba vezet, viszont mindegyik tartomány bejárásából elhagyjuk azt a lépést, amelyiknek egyik végpontja egybeesik a mondott lépéssel; így az egész tábla egy bejárását kapjuk.

Az egyik tartomány egy záródó bejárását összeállíthatjuk, ha k legalább 7, a $3a$ és $3b$ ábrából. Csak az egyik tartományhoz tartozó mezők középpontjait tüntettük fel, a lépéseket pedig a végpontokat összekötő szakaszokkal szemléltettük. A tábla egyik végét a $3a$ ábra szerint járhatjuk be, majd a $3b$ ábrán feltüntetett „halszálka minta" szerű úton haladunk tovább a tábla végétől számított negyedik oszlopig; végül aszerint, hogy a tábla felső vagy alsó részébe értünk-e, a $3a$ ábrának a végpontjain átmenő egyenesre vagy ezen egyenes és a tábla szimmetriatengelyének metszéspontjára vett tükörképével zárhatjuk a bejárást. A $3c$ ábra $k = 9$-re, a $3d$ pedig $k = 10$-re mutatja be eljárásunkat. $k = 7$ esetén nincs halszálkás része a bejárásnak.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 39 (1969) 151. o.



3. ábra

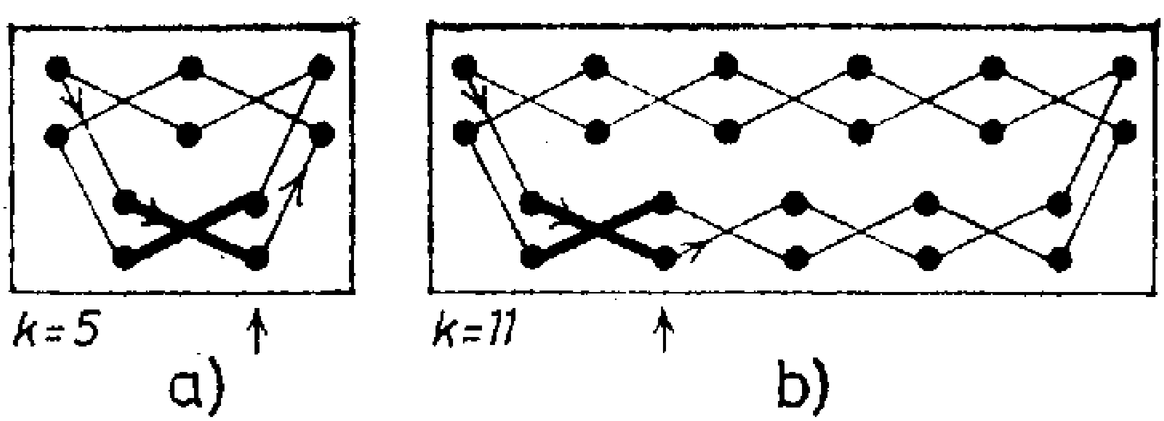


4. ábra

Létezik záródó bejárás $k = 3$-ra is (4. ábra).

III. Más utasítást adunk az egyik résztartomány záródó bejárására, az előbb látottak szerinti további felhasználás céljára.

a) Páratlan k esetére egy szélső mezőről indulva lapos lóugrásokkal kétszer körülfutjuk a táblát – vagyis minden mezőről a 2 oszloppal és 1 sorral odébb álló mezőre lépünk (a táblának természetesen vagy az alsó, vagy a felső felében) –, csupán a tábla szélső $2-2$ oszlopában, a kanyarodva visszafordulásban iktatunk közbe 1–1 magas – azaz 1 oszloppal és 2 sorral távolodó – lóugrást. Valóban, az alsó sornak egy páros sorszámú (legalább a 4-ik) mezejéről így indulva jobbra, az első kanyarodásig a páros oszlopokban lépünk rá $1-1$ mezőre, majd a magas lóugrás után a tábla felső felén visszajőve a páratlan oszlopokban 1-re – 1-re, és ismét az alsó féltáblára kanyarodva $k+1$-edik mezőként az indulási oszlop belső sorbeli mezejére jutunk, hiszen váltakozva külső és belső sorbeli mezőkre léptünk, és $k+1$ páros. A második körülfutással ugyanígy ($2k+1$-edik mezőként) az indulási mezőre jutunk, eszerint útvonalunk záródik. Másrészt a bejárt mezők – az alsó táblafél páros és a felső fél páratlan sorszámú oszlopbeli mezői az egyik résztartományt alkotják (más szóval azért, mert sohasem léptünk belső sorból belső sorba, 5*a* és 5*b* ábra).

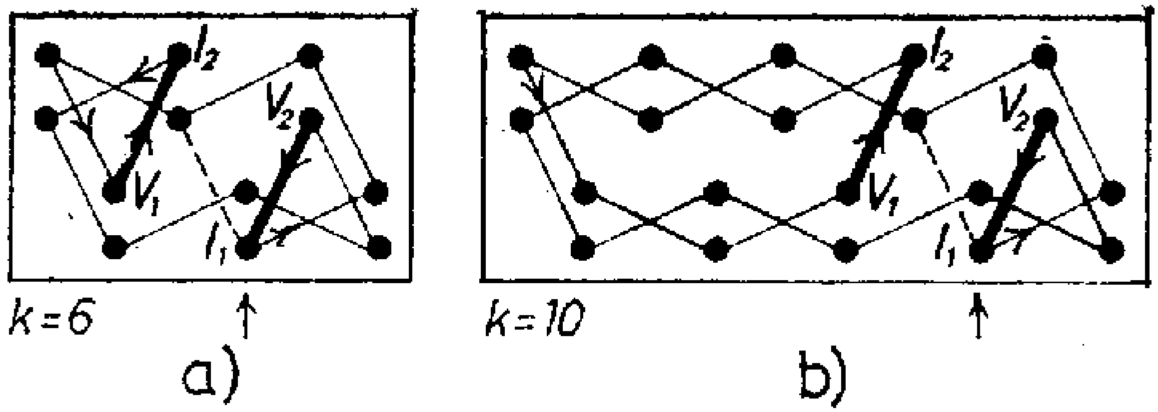


5. ábra

b) Páros k esetén az első körülfutást ugyanígy végezzük. Ekkor azonban $k+1$-edik mezőként az I_1 indulási mezőre jutnánk, ezért az első körülfutást bevégző (tehát 2. sorbeli) mezőből, V_1-ből jobbra fölfelé magas ugrással elérhető (tehát 4. sorbeli) I_2 mezőből indítjuk a második körülfutást.

I_2-re az első körülfutásban nem léptünk rá, ugyanis az alsó táblafélre való visszakanyarodás lépése jobbra lejt, az 1. oszlopból a 2-ba visz, ezért az alsó és a felső táblafélen levő menetvonalrészek is ilyen eltolással állnak elő egymásból, I_1-ből a mondott I_2 alatti mező.

A második körülfutás utolsó mezeje, V_2 az I_2-től jobbra lejtő lapos ugrásnyira adódik, ezért belőle balra süllyedő magas lóugrással I_1-re jutunk, bejárásunk záródik; azonban ezek érdekében az indulás nem történhet a tábla utolsó oszlopából (6*a* és 6*b* ábra).



6. ábra

Ez az eljárás minden megengedett k-ra érvényes.

A két résztartomány záródó bejárásai összekapcsolásának a II. és III. bejárási utasításban használt elvét *Somorjai Gábor* dolgozata tartalmazta, továbbá megadta k néhány páratlan értékére a lapos ugrásos záródó bejárást.