Az $n!$ szám n hatványa, ezért először megvizsgáljuk, mitől függ egy természetes szám hatványainak az utolsó jegye. Mivel egy szorzat utolsó jegyét a tényezők utolsó jegyei egyértelműen meghatározzák, az n^k hatvány utolsó jegye csak n utolsó jegyétől és a k kitevőtől függ. Az alábbi táblázatban feltüntettük az egyes számjegyek hatványainak utolsó jegyét

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$k=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Látható, hogy minden szám ötödik hatványa ugyanarra a jegyre végződik, mint az eredeti szám. Így az ezt követő 6., 7., 8., 9 ... hatvány ugyanarra a jegyre végződik, mint a 2., 3., 4., 5., ... hatvány végződött, ha tehát a kitevőt 4-gyel növeljük, a hatvány utolsó jegye változatlan marad.

Az n^k hatvány utolsó jegye tehát csak attól függ, hogy mennyi n utolsó jegye, és hogy k-t 4-gyel osztva mennyi maradékot kapunk.

Az $n!$ sorozat képezésénél a kitevőben mindig a megelőző tag lép fel, azt kell tehát megállapítanunk, hogy ez 4-gyel osztva mennyi maradékot ad. A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy egy hatvány maradéka szempontjából csak azt kell tudnunk, hogy az alap maradéka mennyi. Így ha az alap 4-gyel osztható, vagy páros az alap, és a kitevő 1-nél nagyobb, akkor a hatvány is osztható 4-gyel; ha az alap 4-gyel osztva 1 maradékot ad, minden hatványa is 1 maradékot ad a 4-gyel való osztásban; és végül ha az alap maradéka 3, akkor a hatvány maradéka 3 vagy 1 aszerint, hogy a kitevő páratlan-e vagy páros. A $k^!$ tehát osztható 4-gyel, ha k páros és $k>2$. Ha k páratlan és $k>1$, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a kitevő épp $(k-1)^!$, tehát páros, így $k^!$-t 4-gyel osztva 1 maradékot kapunk, és ez $1^!=1$-re is igaz.

Visszatérve $n^!$ utolsó jegyének vizsgálatára, ismét azt kell figyelembe vennünk, hogy $n^!$ az n alap olyan hatványa, melyben a kitevő $(n-1)^!$. Így ha n páros, akkor $(n-1)$ páratlan, $(n-1)^!$-t 4-gyel osztva 1-et kapunk maradékul, tehát $n^!$ ugyanarra a jegyre végződik, mint n. Ha n páratlan, akkor $(n-1)$ páros, és $(n-1)^!$ osztható 4-gyel, ha $n-1>2$. Táblázatunkból látjuk, hogy a páratlan számok negyedik hatványa általában 1-re végződik, kivéve az 5-re végződő számokat, melyek minden hatványa 5-re végződik.

Fenti eredményünk úgy is megfogalmazható, hogy ha n utolsó jegye 1, 3, 7, 9, akkor $n^!$ utolsó jegye 1, a többi esetben pedig $n^!$ utolsó jegye megegyezik n utolsó jegyével. Kivételt képez az $n=3$ érték, melyre $3^!=9$.

Vajnági András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megoldották még: Göndöcs Ferenc:, Martoni Viktor, Somorjai Gábor.

Jutalmul 50 Ft-os könyvutalványt kapott *Beck József, Vajnági András.*