I. megoldás. (1)-ben $n=1$-re egyenlőség áll fenn „$<$” helyett. $n>1$-re vizsgáljuk kissé általánosabban a

$$P_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(i+x)$$

polinomot. Legyen x hatványai szerint rendezett alakja

$$P_n(x)=n!+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+x^n.$$

Ha $0<x<1$, akkor nyilván

$$P_n(x)<n!+(c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+1)x.$$

A zárójelben levő összeget meghatározhatjuk $P_n(1)$ segítségével, ami $(n+1)!$:

$$c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+1=(n+1)!-n!=n\cdot n!.$$

Így ha $n\geq 2$ és $0<x<1$, akkor

$$P_n(x)<+n!+n!\cdot nx, \tag{2}$$

és x helyett $1/(n\cdot n!)$-t írva kapjuk (1)-et.

II. megoldás. $P_n(x)/n!$ értékét fogjuk becsülni a $0<x<1$ számközben úgy, hogy az egyes tényezőket becsüljük:

$$\frac{Pn(x)}{n!}=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x}{i}\right),$$

és ha $i\geq 2$,

$$1+\frac{x}{i}=1+\frac{x}{1+(i-1)}<1+\frac{x}{1+(i-1)x}=\frac{1+ix}{1+(i-1)x}.$$

Így, ha $n\geq 2$ és $0<x<1$, akkor

$$\frac{P_n(x)}{n!}<(1+x)\frac{(1+2x)(1+3x)\ldots(1+nx)}{(1+x)(1+2x)\ldots[1+(n-1)x]}=1+nx.$$

Ez a (2) egyenlőtlenség átrendezett alakja, amiből, mint láttuk, következik (1).

Beck József