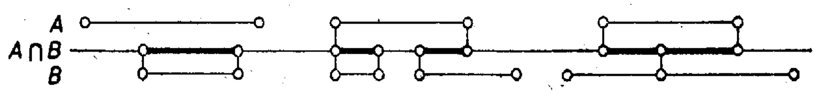
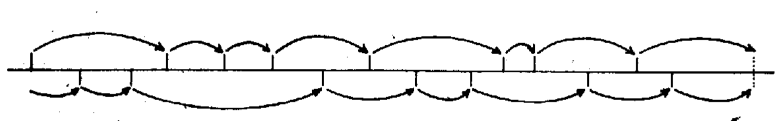
I. megoldás. Mivel sem A intervallumainak, sem B-éinek nincs közös pontja, így a két rendszer közös részének minden egyes pontja A és B egy-egy meghatározott intervallumába esik. E két intervallum közös része egy intervallum, melynek kezdőpontja a két intervallum valamelyikének kezdőpontja, vagy a közös kezdőpontjuk, ha azok egybeesnek. Az utóbbi esetben rendeljük a közös rész részintervallumához az őt tartalmazó A-beli intervallumot, az előbbi esetben azt az A- vagy B-beli intervallumot, amelyikével a kezdőpontja egybeesik (1. ábra).



1. ábra

Így a közös részbeli különböző intervallumokhoz különböző intervallumokat rendeltünk, hiszen kezdőpontjaik különbözők, és bármely A- vagy B-beli intervallumot a közös résznek legfeljebb egy intervallumához rendeltünk hozzá. Így azonban az A és B első intervalluma közül az előbb kezdődőt, vagy ha kezdőpontjuk egybeesik, a B-belit nem rendeltük hozzá a közös rész egy intervallumához sem, ezért a közös rész legfeljebb 1-gyel kevesebb intervallumból állhat, mint amennyi A-ban és B-ben együtt van, vagyis $n+m-1$-ből.

Ennyiből viszont állhat, sőt jelöljük ki bárhogy az A- és B-beli intervallumok kezdőpontjait pl. úgy, hogy az elsők essenek egybe, a többiek viszont mind legyenek különbözők, és tartson minden intervallum az ugyanabba a halmazba tartozó következő kezdőpontig, az utolsó intervallumok pedig egy olyan végpontig, amelyiket az összes kezdőpont megelőz (2. ábra).



2. ábra[1]

Ekkor A is, B is, a közös rész is az első kezdőponttól az utolsó végpontig terjedő nyílt intervallum, elhagyva belőle az első esetben az A-beli, a második esetben a B-beli; a harmadik esetben az összes kezdőpontokat. Így valóban a 3 halmaz n, m, ill. $m+n-1$ intervallumból áll.

Ha A vagy B egyetlen intervallumot sem tartalmaz, akkor természetesen a közös részük sem; ezt az esetet a fentiekben kizártuk.

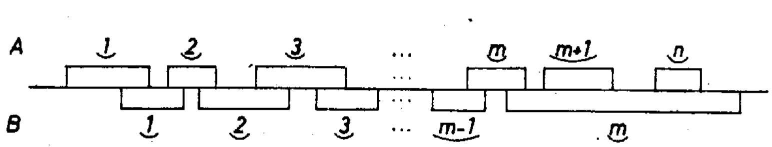
II. megoldás. Legyen a számegyenesen balról jobbra haladva az A halmaz j-edik szakaszának m_j számú B-beli intervallummal nem üres közös része. Ekkor $A\cap B$ intervallumainak száma

$$k=m_1+m_2+\ldots+m_n.$$

Ennél az összeszámolásnál egy B-beli intervallumot 1-nél többször is számolhattunk, annyival többször, ahány A-beli szomszédos intervallumpárral van nem üres közös része. Mivel összesen $n-1$ ilyen szomszédos intervallumpár van, viszont lehetnek olyan B-beli intervallumok, amelyeket nem számoltunk, így azt kaptuk, hogy

$$k=m_1+m_2+\ldots+m_n\le m+n-1.$$

Itt egyenlőség is állhat, ha pl. $n\ge m$, B l-edik intervalluma az A l-edik intervallumának utolsó harmadától $l+1$-edik intervallumának első harmadáig terjed $l=1,\ \ldots,\ m-1$-re, B m-edik intervalluma pedig A m-edik intervallumának $2/3$-ánál kezdődik és tartalmazza összes esetleges további szakaszát (3. ábra).



3. ábra[2]

Beck József (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A közös rész két szomszédos intervallumát olyan pontok választják el (esetleg 1 pont), amelyek A és B közül legalább az egyikben nincsenek benne. Ezek a pontok együtt a számegyenes A-ba nem tartozó pontjainak

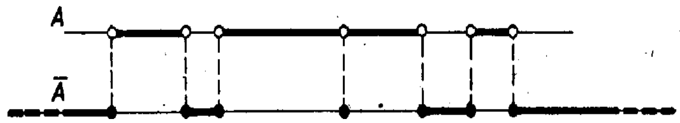
[1] A 2. ábra kiegészítendő: a bal szélén alul is kell osztásvonal.

[2] A 3. ábrán $m+1$ és n közé 3 pont teendő.

– az A-hoz a számegyenesre vonatkozóan tartozó kiegészítő (komplementer) halmaznak, szokásos jelével $\overline{A}$-nak – és a B-be nem tartozó pontok $\overline{B}$ halmazának az egyesítése: $\overline{A} \cup \overline{B}$. Ez éppen $A \cap B$ komplementere:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ha A az $(a_i,\ b_i)$ $i = 1,\ \ldots,\ n$ intervallumokból áll ($a_1 < b_1 \leq a_2 < < b_2\ \ldots\ a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n$, akkor $\overline{A}$ az a_1-ig terjedő és a b_n-től kezdődő félegyenesből és a $[b_i,\ a_{i+1}]$ zárt intervallumokból áll ($i = 1,\ \ldots,\ n-1$), amelyek egy-egy pontra is redukálódhatnak (4. ábra).



4. ábra

Hasonlóan $\overline{B}$ két félegyenesből és $m-1$ zárt intervallumból áll.

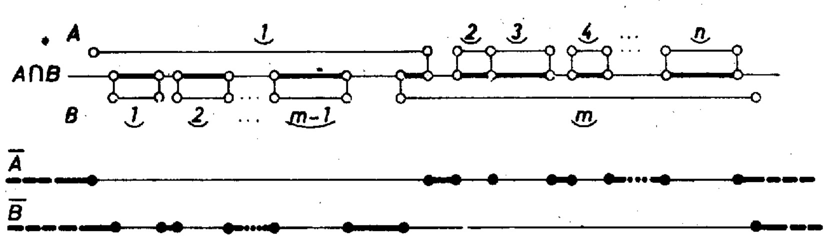
Az $\overline{A} \cup \overline{B}$ ugyancsak két félegyenesből és zárt szakaszokból áll. Az utóbbiak számát jelöljük k-val. $\overline{A} \cup \overline{B}$ nyilván legfeljebb annyi szakaszból áll, mint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ együtt, azaz

$$k \leq m + n - 2,$$

mert az egyesítésnél több intervallum alkothat egy nagyobbat, de új intervallum nem keletkezhet. A k intervallum közt $A \cap B$-nek $k-1$ intervalluma van, ezen kívül az első félegyenes és az első szakasz, továbbá az utolsó szakasz és a második félegyenes közt egy-egy, így $A \cap B$ intervallumainak száma

$$k + 1 \leq m + n - 1.$$

Itt az egyenlőség bekövetkezhet pl. ha A első szakasza tartalmazza B első $m-1$ szakaszát és még az utolsóval is van nem üres közös része, B utolsó szakasza pedig tartalmazza A többi szakaszait. Ekkor ugyanis $\overline{A}$ és $\overline{B}$ szakaszainak sem egymással, sem a félegyenesekkel nincs közös pontja (5. ábra).



5. ábra