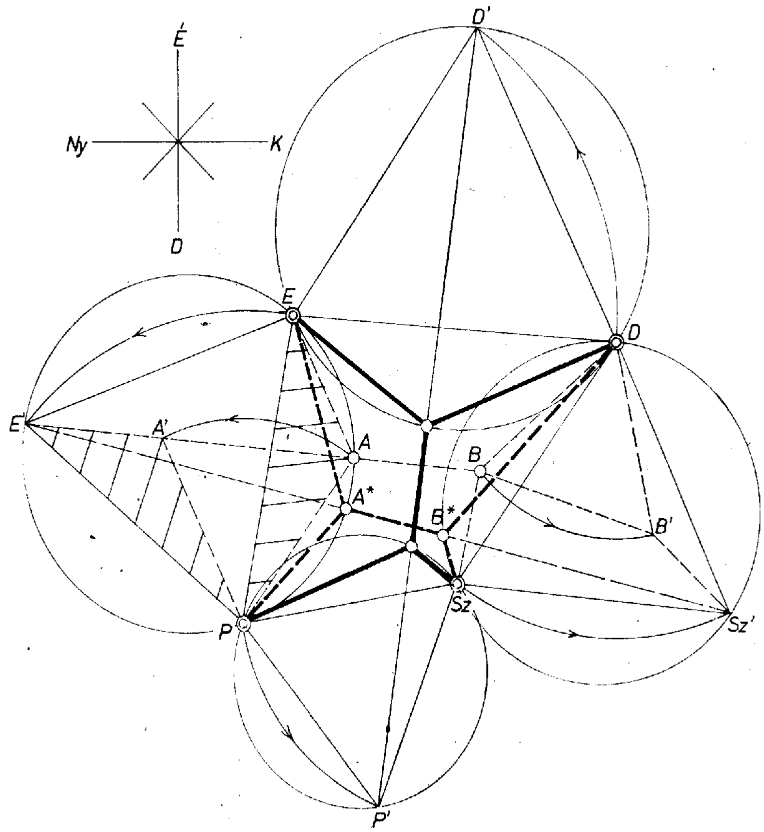
Csak olyan távvezeték-rendszerekkel foglalkozunk, melyek véges sok egyenes szakaszból állnak (ha a távvezetéket a szokott módon oszlopok közt kifeszített huzalokkal készítjük el, akkor ez a feltevés eleve teljesül).




Az említett városok (mint pontok) helyzetét térkép alapján vettük fel az ábrán, és nevük első betűjével jelöltük. Legyen $R$ egy tetszőleges, a feladat követelményeinek eleget tevőrendszer. $R$ tartalmaz egy $E$-t $Sz$-szel összekötő $L$ véges sok egyenes szakaszból álló útvonalat. E szakaszok mindegyikén meghatározhatjuk a $P$-hez legközelebb levő pontot: ez $P$-nek az illető szakaszt tartalmazó egyenesen levő vetülete, ha ez a vetület az illető szakaszon van, különben a szakasz két végpontja közül a $P$-hez közelebbi. Az így kapott pontok közül a $P$-hez legközelebbit jelöljük $A$-val: ez egyben az $L$ útvonal $P$-hez legközelebbi pontja. Hasonló módon legyen $B$ az $L$ útvonal $D$-hez legközelebbi pontja.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $E$-ből $L$-en $Sz$ felé haladva előbb az $A$ vagy a $B$ pontba jutunk-e el. Az első esetben $L$-en az említett pontok sorrendje: $E$, $A$, $B$, $Sz$, az ilyen útvonalakat első típusúaknak nevezzük. Jelöljük $R_1$-gyel az $EA$, $PA$, $AB$, $BSz$, $BD$ szakaszokból álló rendszert. Megmutatjuk, hogy $R_1$-ben a vezetékek együttes hossza nem nagyobb, mint $R$-ben. $R$ ugyanis tartalmazza $L$-t, ennek a hossza legalább akkora, mint az $EABSz$ törött vonalé. Továbbá $R$ tartalmaz egy $P$-ből $E$-be futó útvonalat, ennek az $L$-hez nem tartozó darabja nem lehet $PA$-nál rövidebb. Hasonló módon a $D$-ből $Sz$-be futó útvonal $L$-hez nem tartozó darabja nem lehet $DB$-nél rövidebb. Így $R_1$ minden részéhez találtunk $R$-ben nála nem rövidebb – és egymást még részben sem tartalmazó – útdarabokat, állításunkat tehát bebizonyítottuk.

Forgassuk el az $EAP$ törött vonalat $P$ körül pozitív irányban $60°$-kal, kapjuk az $E'$, $A'$ pontokat. Mivel $PAA'$ egyenlő oldalú háromszög,

$$EA + AP = E'A' + A'P = E'A' + A'A.$$

Hasonló módon vigye a $D$ körüli, pozitív irányú $60°$-os forgatás a $B$, $Sz$ pontokat $B'$-be és $Sz'$-be, ekkor

$$SzB + BD = Sz'B' + B'D = Sz'B' + B'B.$$

$R_1$ darabjainak összhossza tehát egyenlő az $E'A'ABB'Sz'$ törött vonal hosszával, ami pedig legalább akkora, mint az ($A$ és $B$ helyzetétől független) $E'Sz'$ szakasz hossza.

Mivel az $E'Sz'$ szakasz metszi az $EE'P$ egyenlő oldalú háromszög köré írható kör rövidebb $EP$ ívét az $A^*$ pontban, és az $SzSz'D$ egyenlő oldalú háromszög köré írható kör rövidebb $SzD$ ívét a $B^*$ pontban, van olyan első típusú $R_1^*$ távvezeték-rendszer, melynek összhossza egyenlő az $E'Sz'$ szakasz hosszával. Ugyanis $PA^*E'\sphericalangle = 60°$ s így $A^*$ elforgatottja az $E'A^*$ szakaszra, $B^*$-é hasonlóan a $B^*Sz'$ szakaszra kerül. Az $A^*$, $B^*$ pontok által meghatározott $R_1^*$ távvezeték-rendszer tehát minimális az első típusú rendszerek körében.

Hasonló módon határozhatjuk meg azon rendszerek körében a minimális úthálózatot, melyeknél $L$-en $E$-ből indulva előbb jutunk $B$-be, és aztán $A$-ba. Jelöljük ezt a minimális rendszert $R_2^*$-gal, $R_2^*$ darabjának összhossza egyenlő a

$P'D'$ szakasz hosszával, ahol $P'$-t a $P$-ből kapjuk $Sz$ körüli, $D'$-t pedig $D$-ből kapjuk $E$ körüli pozitív irányú $60^\circ$-os forgatással.

A szerkesztés és a térkép léptéke alapján meghatározzuk az $E'Sz'$, $P'D'$ szakaszok valódi hosszát, előbbire 504 km-t, utóbbira 501 km-t kapunk, tehát $R_2^*$ a minimális rendszer. Megjegyezzük, hogy az eltérés igen kicsi a két távolság között, nagyságrendje megegyezik a (nem pontszerű) városok méretével ($3-6$ km) és a szerkesztésünkből származó hibával.

*Göndőcs Ferenc*