Legyen x_0 rögzített egész szám, keresünk a $p(x_0)$ szám közelébe eső négyzetszámokat. Ennek érdekében olyan, egész együtthatós polinomot keresünk, melynek négyzete közel van $p(x)$-hez. Olyat könnyen találunk, hogy a négyzet első két együtthatója megegyezzék $p(x)$ első két együtthatójával:

$$q_c(x) = (2x^2 - 3x + c)^2 = 4x^4 - 12x^3 + (9 + 4c)x^2 - 6cx + c^2,$$

és ezzel a különbség:

$$\delta_c(x) = p(x) - q_c(x) = 4(2 - c)x^2 + 6(c - 1)x - (4 + c^2).$$

A $c = 2$ együtthatóhoz tartozó $\delta_2(x)$ eltérés lineáris, a vele szomszédos egész c-értékekhez tartozó eltérések másodfokú polinomok:

$$\begin{aligned} c = 1\text{-hez}: &\qquad \delta_1(x) = 4x^2 - 15, \\ c = 3\text{-hoz}: &\qquad \delta_3(x) = -4x^2 + 12x - 23. \end{aligned}$$

Az utóbbi minden x értékre negatív, $\delta_1(x)$ pozitív, ha $|x| > \sqrt{15}/2$. Ebben az esetben

$$q_1(x) < p(x) < q_3(x).$$

Ha tehát $|x| \geq 2$, akkor $p(x_0)$ a $2x_0^2 - 3x_0 + 1$ és $2x_0^2 - 3x_0 + 3$ egész számok négyzete közé esik, így csak akkor lehet négyzetszám, ha egyenlő $2x_0^2 - 3x_0 + 2$ négyzetével, azaz $\delta_2(x_0) = 0$, amiből $x_0 = 3$, és így $p(3) = 11^2$.

A még megvizsgálandó $|x_0| \leq 1$ értékekhez tartozó

$$p(-1) = 25, \qquad p(0) = -14, \qquad p(1) = -11$$

számok közül pedig csak egy – az első – négyzetszám.

Ezek szerint $p(x)$ két egész x-re állít elő teljes négyzetet. smallskip

Reviczky János (Budapest, I. István Gimn.)

Megoldotta még Beck József, Maróti Péter, Martoni Viktor, Somorjai Gábor.

Jutalmul 50 Ft-os könyvutalványt kapott: *Beck József, Martoni Viktor.*