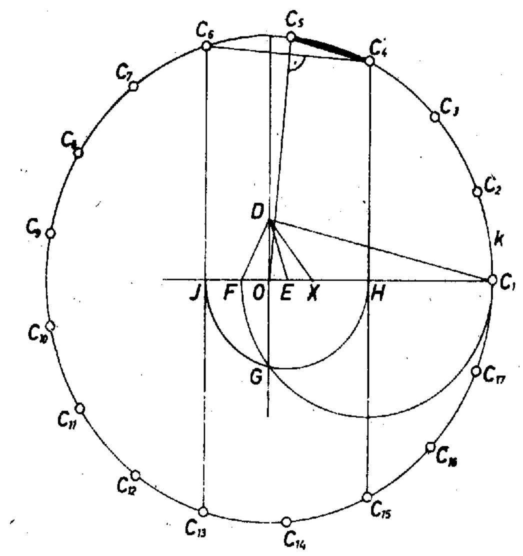
Megmutatjuk, hogy a szerkesztés pontos, $\alpha = 2\pi/17$ jelöléssel $C_1OC_4\sphericalangle = 3\alpha$ és $C_1OC_6\sphericalangle = 5\alpha$.



Válasszuk hosszúságegységnek a k kör sugarát. Így $\cos C_1OC_4\sphericalangle = OH$ és $\cos C_1OC_6\sphericalangle = OJ$, pozitívnak véve az OC_1 irányt, és meg kell határoznunk $\cos 3\alpha$-t és $\cos 5\alpha$-t.

Kiindulunk a

$$\cos n\alpha = \cos\alpha\cos(n-1)\,\alpha - \sin\alpha\sin(n-1)\,\alpha$$

összefüggésből. Ezt az $n = 1, 2, \ldots, 17$ értékekre felírva és összeadva

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 17\alpha =$$
$$= \cos\alpha(1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos 16\alpha) - \sin\alpha(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin 16\alpha).$$

A második zárójel értéke 0, hiszen $\sin n\alpha + \sin(17-n)\,\alpha = 0$, így pedig az első zárójel értéke is 0, hiszen $\cos 17\alpha = 1$ folytán egyenlő a bal oldallal, és szorzója, $\cos\alpha \neq 1$. Így

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos 16\alpha = -1,$$

ami a

$$t_n = \cos n\alpha + \cos(17-n)\,\alpha = 2\cos n\alpha$$

jelölés bevezetésével így alakul:

(1) $$t_1 + t_2 + \ldots + t_8 = -1.$$

A bevezetett számokra egyrészt nyilvánvalóan

(2) $$t_n = t_{-n} = t_{17-n},$$
(3) $$t_n \cdot t_m = t_{n-m} + t_{n+m},$$

másrészt mint könnyen belátható,

(4) $$2 > t_1 > t_2 > 2\cos 60^\circ = 1 > t_3 > t_4 > 0 > t_5 > t_6 > t_7 > t_8 > -2.$$

Tekintsük most a következő két összeget:

$$U = t_1 + t_2 + t_4 + t_8, \qquad u = t_3 + t_5 + t_6 + t_7,$$

ezekre (1)–(3) alapján a következő egyenletrendszert kapjuk:

(5) $$U + u = -1, \qquad U \cdot u = 4(t_1 + t_2 + \ldots + t_8) = -4,$$

tehát a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések alapján

(6) $$U = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \qquad u = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},$$

ugyanis (4) miatt $U > 0$.

Ezek alapján hasonlóan számíthatjuk ki a következő két-két összeget:

$$V = t_1 + t_4, \quad v = t_2 + t_8; \qquad w = t_3 + t_5, \quad W = t_6 + t_7,$$

ugyanis ezekre

$$V + v = U \quad \text{és} \quad V \cdot v = -1, \quad \text{illetőleg} \quad w + W = u \quad \text{és} \quad w \cdot W = -1,$$

és mivel még (4) szerint $V > 0$ és $W < 0$, azért

$$v = \frac{U - \sqrt{U^2 + 4}}{2}, \tag{7}$$

$$w = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{2}. \tag{8}$$

Végül a w összeg tagjainak szorzata (3) szerint

$$t_3 t_5 = t_2 + t_8 = v,$$

így a keresett két érték 2-szerese: $2\cos 3\alpha = t_3$ és $2\cos 5\alpha = t_5$ a következő másodfokú egyenlet két gyöke:

$$x^2 - wx + v = 0, \tag{9}$$

előrebocsátott megjegyzésünk szerint azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy az előjeles OH, OJ szakaszok 2-szerese is kielégíti-e (9)-et.

A szerkesztés szerint $OD = 1/4$, $DC_1 = \sqrt{17}/4$. Legyen X az ODC_1 háromszög D-beli szögfelezőjének OC_1-gyel való metszéspontja. A szögfelező-tétel alkalmazásával, majd felismerve a (6)-beli második kifejezést, továbbá az ODX derékszögű háromszögből

$$OX = \frac{OD \cdot OC_1}{OD + OC_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}} = -\frac{1}{2u},$$

$$DX = \sqrt{OD^2 + OX^2} = -\frac{1}{4u}\sqrt{u^2 + 4}.$$

Hasonlóan, mivel DE az ODX háromszög szögfelezője, mindjárt felismerve a (8) kifejezést

$$OE = \frac{OD \cdot OX}{OD + DX} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2u}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4u}\sqrt{u^2 + 4}} = \frac{1}{2\left(\sqrt{u^2 + 4} - u\right)} = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{2} = \frac{w}{4},$$

és ebből

$$\operatorname{tg} EDO\sphericalangle = \frac{OE}{OD} = w.$$

Ennek alapján kifejezhetjük OF-et. (8) és (5) felhasználásával, majd felismerve a (7) kifejezést

$$OF = -OD \operatorname{tg}(45^\circ - EDO\sphericalangle) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - w}{1 + w} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(2 - u) - \sqrt{u^2 + 4}}{(2 + u) + \sqrt{u^2 + 4}} = \tag{11}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{u^2 + 4}}{-4u} = \frac{2U - \sqrt{(uU)^2 + 4U^2}}{-4uU} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U - \sqrt{U^2 + 4}}{2} = \frac{v}{4}.$$

Most már képezhetjük a kérdéses $2OH$, $2OJ$ előjeles szakaszok összegét és szorzatát. E felezi a JH szakaszt, ezért (10) alapján

$$\frac{OH + OJ}{2} = OE, \qquad 2OH + 2OJ = 4OE = w, \tag{12}$$

a közös magasságú HJG és G_1FG derékszögű háromszögekből pedig (11) alapján

$$2OH \cdot 2OJ = -4OH \cdot |\,OJ\,| = -4OG^2 = -4 \cdot OC_1 \cdot |\,OF\,| = 4 \cdot OF = v, \tag{13}$$

és (12), (13) együtt azt jelenti, hogy az OH, OJ előjeles szakaszok 2-szerese szintén kielégíti a (9) egyenletet. És mivel (9)-nek csak két gyöke van, a két úton kapott gyökök páronként azonosak, (4) figyelembevételével

$$2OH = t_3 = 2\cos 3\alpha, \qquad 2OJ = t_5 = 2\cos 5\alpha,$$

ami állításunkat bizonyítja.

Csirmaz László (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. C. F. Gauss német matematikus bebizonyította (19 éves korában, 1796-ban), hogy szabályos sokszög eukleidészi szerkesztéssel akkor és csak akkor szerkeszthető, ha oldalai számának prímfelbontása $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_r$ alakú, ahol $p_1, \ldots, p_r$ egymástól különböző, $2^s + 1$ alakú prímek, $s = 2^t$ alakú kitevővel. (A $t = 0$ és 1 esetek, szabályos háromszög és szabályos ötszög, közismertek.) Azóta számos eljárást adtak meg a szabályos 17-szög szerkesztésére, a fentiekben *H. W. Richmond* eljárását ismertük meg (1893). Az $\alpha = 2\pi/17$ szögre Gauss a következő eredményt közölte egy tanítványával:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$
$$+\frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$