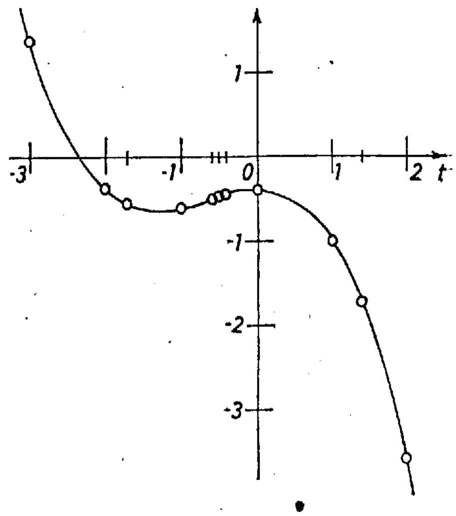
A megadott t_0, értékek mellett a sorozatok első értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:

t_0	-3	-2	-1	$-1/2$	0	1	2
t_1	$+1{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}6$	$-0{,}475$	$-0{,}4$	-1	$-3{,}6$
t_2	$-1{,}73$	$-0{,}4512$	$-0{,}5007$		$-0{,}4512$	$-0{,}6$	$+3{,}7472$
t_3	$-0{,}562$						

Ezek alapján ábrázoljuk az $f(t) = -\dfrac{1}{5}(t^3 + 2t^2 + 2)$ függvényt.



Mivel $t = -0{,}4$ mellett $f(t) < t$ és $t = -0{,}5$ mellett $f(t) > t$, a $t = f(t)$ egyenletnek van a $(-0{,}5; -0{,}4)$ számközben gyöke, jelöljük ezt t^*-gal:

$$-0,5 < t^* < -0{,}4. \tag{2}$$

Legyen $t_n = t^* + \varepsilon$, akkor (1) alapján

$$t_{n+1} = -\frac{1}{5}\big[(t^{*3} + 2t^{*2} + 2) + \varepsilon(3t^{*2} + 4t^*) + \\ +\varepsilon^2(3t^* + 2) + \varepsilon^3\big] = t^* + \frac{\varepsilon}{5}(A + B\varepsilon - \varepsilon^2),$$

ahol $A = -3t^{*2} - 4t^*$; $B = -3t^* - 2$. (Felhasználtuk, hogy t^* gyöke az egyenletnek, azaz $f(t^*) = t^*$.) (2) alapján – mivel e számközben A monoton –

$$1{,}12 < A < 1{,}25, \tag{3}$$
$$-0{,}8 < B < -0{,}5. \tag{4}$$

Megmutatjuk, hogy ha $-1 \le t_n \le 0$, akkor t_n-től kezdve a sorozat monoton, mégpedig $t_n < t^*$ esetén monoton növekvő és $t_n > t^*$ mellett monoton fogyó. (2) miatt ugyanis ekkor $|\varepsilon| < 0{,}6$, tehát (3), (4) alapján

$$A + B\varepsilon - \varepsilon^2 < A + |B| \cdot |\varepsilon| < 1{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 1{,}73 < 2,$$
$$A + B\varepsilon - \varepsilon^2 > A - |B| \cdot |\varepsilon| - \varepsilon^2 > 1{,}12 - 0{,}48 - 0{,}36 = 0{,}28 > 0.$$

Ezek alapján pedig

$$0 < \frac{t_{n+1} - t^*}{t_n - t^*} < 0{,}4, \tag{5}$$

vagyis t_{n+1} a t^* gyöknek ugyanazon az oldalán van, mint t_n, de közelebb kerül a gyökhöz, a hiba határozottan csökken. Ez utóbbi megállapításból következik, hogy t_{n+1} is a $(-1, 0)$ számközben van, tehát a fenti tulajdonság az összes további lépésnél megmarad.

A $t_0 = 2$ kiinduló érték kivételével az összes többi sorozat az első néhány lépés során bejut a $(-1, 0)$ számközbe, és ettől kezdve monoton lesz. Mivel a hiba minden lépésben az előző hiba felénél kisebbre csökken, ezekben a sorozatokban a t^* gyök tetszőlegesen jó közelítése megtalálható.

A $t_0=2$ kezdeti értékből kiindulva egyre nagyobb abszolút értékű számokat kapunk váltakozó előjellel a sorozat elemeire. Megmutatjuk, hogy ez mindig így van, ha a hiba legalább 3, azaz $|\varepsilon|\ge 3$.

$$A+B\varepsilon-\varepsilon^2<-\varepsilon^2\left(1-\frac{B}{\varepsilon}-\frac{A}{\varepsilon^2}\right)<-\varepsilon^2\left(1-\frac{0{,}5}{3}-\frac{1{,}25}{9}\right)<-6,$$
$$\frac{t_{n+1}-t^*}{t_n-t^*}<-1{,}2.$$

Tehát ha a hiba 3-nál nagyobb, akkor minden lépésben megváltozik az előjele, és abszolút értékben növekszik.

Beck József, Csirmaz László