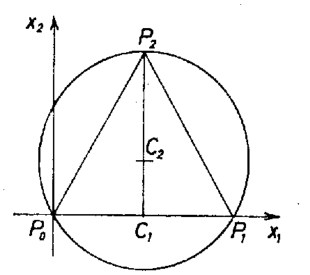
I. Jelöljük C_2-vel P_3 merőleges vetületét a P_0, P_1, P_2 pontok síkján; határozzuk meg először ennek a koordinátáit. Megmutatjuk, hogy C_2 a $P_0P_1P_2$ háromszög köré írható kör középpontja. A $P_iC_2P_3$ háromszögek ($i = 0, 1, 2$) ugyanis derékszögűek, tehát

$$P_iC_2^2 + C_2P_3^2 = P_iP_3^2, \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{2}$$

ahol a jobb oldalon az előírás szerint 1 áll. Jelöljük a C_2P_3 szakasznak, a keresett tetraéder magasságának hosszát m_3-mal. Ekkor (2) alapján

$$P_iC_2^2 = 1 - m_3^2, \qquad (i = 0, 1, 2)$$

ami állításunkat igazolja.



A C_2, P_2 pontok egyenlő távolságra vannak a P_0, P_1 pontoktól, a P_0P_1 szakaszra eső vetületük tehát e szakasz C_1 felezőpontjával azonos. Jelöljük a C_2 pont koordinátáit $(c_1, c_2, 0)$-val. Mivel $P_0P_1P_2$ szabályos háromszög,

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{3}C_1P_2 = \frac{1}{3}m_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

és (3) alapján

$$m_3^2 = 1 - P_0C_2^2 = 1 - c_1^2 - c_2^2 = \frac{2}{3}.$$

Ezek szerint a P_3 pont koordinátái $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

II. Jelöljük a keresett R_j pontok ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) koordinátáit $(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$-nel. A feladat szerint

$$x_{ji} > 0 \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le j \qquad \text{és} \qquad x_{ji} = 0, \quad \text{ha} \quad j < i \le n$$

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk ezeket a pontokat úgy, hogy bármelyik két pont távolsága 1. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $0 \le j \le n$ mellett pontosan egy olyan C_j pont van, melynek csak az első j koordinátája különbözik 0-tól és az $R_0, R_1, \ldots, R_j$ pontoktól egyenlő távolságra van.

A C_0 pontnak minden koordinátája 0, tehát azonos P_0-lal, C_1-nek csak az első koordinátája nem 0, és P_0-tól, P_1-től egyenlő távolságra van, így ez az első koordináta csak 1/2 lehet.

Tegyük fel, hogy állításunk helyes minden $j \le k$ értékre, és a Q $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pont egyenlő távolságra van az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontoktól. Ha $i \le k$, akkor az R_i, Q pontok távolsága (1) szerint

$$R_iQ^2 = (x_{i1} - y_1)^2 + \ldots + (x_{ik} - y_k)^2 + y_{k+1}^2 + \ldots + y_n^2, \tag{4}$$

hiszen $x_{il} = 0$, ha $l > k \ge i$. A Q' $(y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ pontnak pedig az R_i ponttól mért távolsága

$$R_iQ'^2 = (x_i - y_1)^2 + \ldots + (x_{ik} - y_k)^2. \tag{5}$$

(4)-ből (5)-öt kivonva kapjuk, hogy

$$R_iQ^2 - R_iQ'^2 = y_{k+1}^2 + \ldots + y_n^2,$$

$$R_iQ'^2 = R_iQ^2 - (y_{k+1}^2 + \ldots + y_n^2). \tag{6}$$

A Q' pont tehát egyenlő távolságra van az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontoktól, így azonos C_k-val, azaz minden olyan Q pont első k koordinátája egyenlő a $C_k$pont első k koordinátájával, amely az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontoktól egyenlő távolságra van.

Jelöljük a C_k pont koordinátáit $(c_1, c_2, \ldots, c_k, 0, 0, \ldots, 0)$-val, és legyen a C_{k+1} pont egyenlő távolságra az $R_0, R_1, \ldots R_{k+1}$ pontoktól. A fentiek alapján C_{k+1} első k koordinátája megegyezik C_k koordinátáival, jelöljük a $(k+1)$-iket c_{k+1}-gyel, és tegyük fel, hogy a többi koordináta 0. Megmutatjuk, hogy C_{k+1} egyértelműen meg van határozva.

Mivel az R_{k+1} pont is egyenlő távolságra van az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontoktól, R_{k+1} első k koordinátája is megegyezik C_k koordinátáival; jelöljük R_{k+1} $(k+1)$-ik koordinátáját m_{k+1}-gyel. (6) alapján a $Q = C_{k+1}$ pontra kapjuk, hogy ha $i \leq k$,

$$R_iC_{k+1}^2 - R_iC_k^2 = c_{k+1}^2, \tag{7}$$

a $Q = R_{k+1}$ pontra pedig

$$R_iR_{k+1}^2 - R_iC_k^2 = m_{k+1}^2. \tag{8}$$

(8) és (7) különbségébe az

$$R_iC_{k+1}^2 = R_{k+1}C_{k+1}^2 = (m_{k+1} - c_{k+1})^2$$

értéket helyettesítve kapjuk, hogy

$$(m_{k+1} - c_{k+1})^2 - 1 = c_{k+1}^2 - m_{k+1}^2,$$

$$c_{k+1} = \frac{2m_{k+1}^2 - 1}{2m_{k+1}}, \tag{9}$$

a C_{k+1} pontot tehát valóban egyértelműen meghatározzák az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontok.

Azt is kaptuk, hogy ha $i < j$, akkor C_j első i koordinátája megegyezik C_i első i koordinátájával, és R_j első $j-1$ koordinátája megegyezik C_{j-1} első $j-1$ koordinátájával. Az R_j pont koordinátái tehát:

$$x_{j1} = c_1,\ x_{j2} = c_2,\ \ldots,\ x_{j,j-1} = c_{j-1},\ x_{jj} = m_j,\ x_{j,j+1} = \ldots = x_{jn} = 0, \tag{10}$$

ahol a c_i és m_i együtthatók kapcsolatát (9) adja meg. (10) és (1) alapján R_j és R_{j+1} távolságára kapjuk, hogy

$$m_{j+1}^2 + (m_j - c_j)^2 = 1, \tag{11}$$

amiből, (9)-et felhasználva rekurziót kaphatunk az m_j számokra:

$$m_{j+1}^2 = 1 - (m_j - c_j)^2 = m_j^2 - c_j^2 = m_j^2 - \left(m_j - \frac{1}{2m_j}\right)^2 = 1 - \frac{1}{(2m_j)^2}. \tag{12}$$

Az $m_1 = 1$ értékből kiindulva kapjuk, hogy

$$m_2^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \qquad m_3^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \qquad m_4^2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8},$$

ezek alapján azt sejtjük, hogy

$$m_k^2 = \frac{k+1}{2k}. \tag{13}$$

Ezt (12) alapján teljes indukcióval bizonyítjuk be.

$$m_{k+1}^2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m_k^2} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{2k+2-k}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Végül (13) és (9) alapján

$$c_k = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{k}{2(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}. \tag{14}$$

Ha tehát van a feladatnak megoldása, akkor csak a (10), (13), (14) összefüggésekkel megadott koordinátájú pontok felelhetnek meg. Vegyük észre, hogy

$$m_k = (k+1)c_k \tag{15}$$

tehát ha $1 \leq i < j \leq n$, az így kapott R_i, R_j pontok távolsága

$$R_iR_j^2 = i^2c_i^2 + c_{i+1}^2 + \ldots + c_{j-1}^2 + (j+1)^2c_j^2 =$$
$$= \frac{i}{2(i+1)} + \frac{1}{2(i+1)(i+2)} + \ldots + \frac{1}{2(j-1)j} + \frac{j+1}{2j} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{i+1}\right) + \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) + \left(1 + \frac{1}{j}\right)\right],$$

a kapott pontok tehát valóban megfelelőek.

Megjegyzés. (15) alapján könnyen bizonyítható, hogy a C_k pont az $R_0, R_1, \ldots, R_k$ pontok „súlypontja”, azaz

$$c_i = \frac{1}{k+1}\left(x_{0i} + x_{1i} + \ldots + x_{ki}\right)$$

ha $i \leq k$

Göndőcs Ferenc