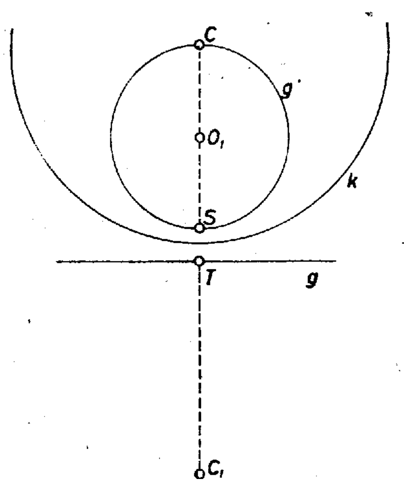
Ismeretes,[1] hogy g-nek g' inverze mindenképpen kör, tehát mindig beszélhetünk O_1 középpontjáról. Tudjuk továbbá, hogy ha g egyenes, akkor inverz képe átmegy C-n, és C-ből induló átmérőjének másik végpontját a C-ből a g egyenesre bocsátott merőleges T talppontjának S inverz képe adja (1. ábra).

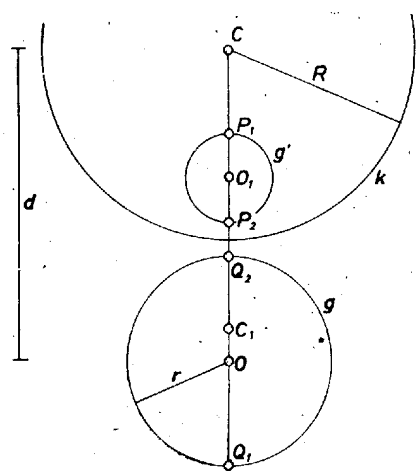


1. ábra

Így O_1 a CS szakasz felezőpontja.

Másrészt C-nek g-re való tükörképe a CT félegyenesen van, kétszer olyan távol C-től, mint T, így ebben az esetben a feladat állítása következik abból az egyszerű tényből, hogy kétszeres távolságban elhelyezkedő pont inverz képe fele akkora távolságra van az inverzió középpontjától, mint az eredeti pont inverz képe.

Legyen most g kör, és O középpontja ne legyen azonos C-vel. Tudjuk, hogy g' céljára egy átmérő végpontjait a g kör C-től legtávolabbi Q_1 és legközelebbi Q_2 pontjának P_1 és P_2 inverz képei adják, tehát O_1 a P_1P_2 szakasz felezőpontja. Jelöljük R-rel a k alapkör, r-rel g sugarát és legyen $CO = d$, a feltevés alapján $d \neq r$ (2. ábra).



2. ábra

Ekkor

$$CQ_1 = d + r, \qquad CQ_2 = d - r,$$
$$CP_1 = \frac{R^2}{d+r}, \qquad CP_2 = \frac{R^2}{d-r},$$

ezért

$$CO_1 = \frac{CP_1 + CP_2}{2} = R^2 \cdot \frac{d}{d^2 - r^2}, \tag{1}$$

ahol a szereplő távolságok előjellel együtt értendők, pozitívnak véve a CO félegyenes irányát.

[1]Lásd *Surányi János – Tusnády Gábor:* Az inverzióról, K. M. L. 37 (1968) 97–101. o.

Másrészt a C pont g-re vonatkozó C_1 inverz képe O-tól $-\frac{r^2}{d}$ távolságra, s így C-től $d-\frac{r^2}{d}$ távolságra van. Ezért a C_1 pont k-ra vonatkozó C_2 inverz képének C-től való távolsága

$$CC_2 = \frac{R^2}{d-\frac{r^2}{d}} = R^2 \cdot \frac{d}{d^2-r^2}. \tag{2}$$

Mivel pedig O_1 és C_2 a k és g centrálisán helyezkednek el, azért $C_2 \equiv O_1$, ami bizonyítandó volt.

Végül abban az esetben, ha g kör, és O középpontja maga C, akkor C-nek nem létezik g-re vonatkozó inverz képe, s így g' középpontját a feladatban leírt módon nem kaphatjuk meg. Könnyű látni azonban, hogy ekkor az inverz kör középpontja maga C.

Göndőcs Ferenc, Martoni Viktor, Somorjai Gábor

Közöljük, hogy egy adományozó felkérésére *Somorjai Gábornak* és *Göndőcs Ferencnek* 50–50 Ft jutalmat juttattunk el problémamegoldásaikért.