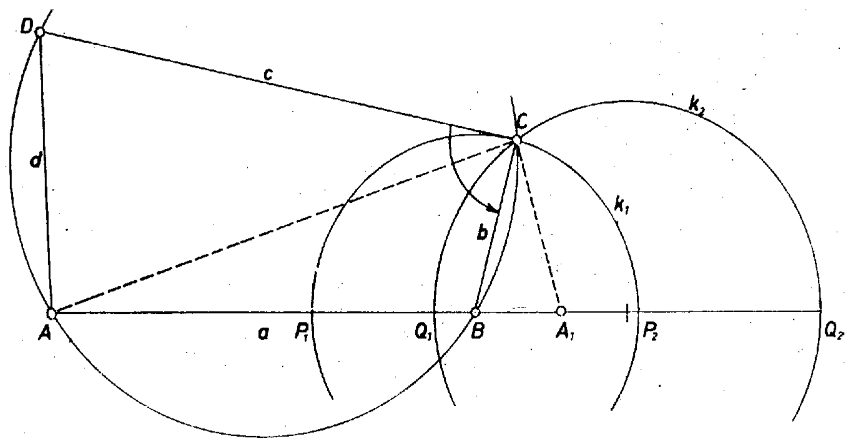
I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeknek megfelelő húrnégyszög, adott az $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ hosszúság. Ahhoz, hogy ezekből négyszöget lehessen szerkeszteni, a legnagyobbnak is kisebbnek kell lennie a másik három összegénél.

Tudjuk, hogy az $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha benne a szemközti szögek összege $180°$, ha tehát pl. a BC oldal és AB meghosszabbítása közti külső szög egyenlő a $CDA\sphericalangle$-gel. Ekkor el tudunk helyezni a $CDA\triangle$-höz hasonló $CBA_1\triangle$-et úgy, hogy A_1 az AB meghosszabbításán legyen, és a csúcsok a felsorolás sorrendjében feleljenek meg egymásnak. Ekkor a két háromszögben a megfelelő távolságok aránya $CB/CD=b/c$. ($ACDA\triangle$-et egy ilyen arányban és $DCB\sphericalangle$-gel történő forgatva nyújtás viszi át a $CBA_1\triangle$-be.)



1. ábra

Így (1. ábra)

$$BA_1=d\frac{b}{c}.$$

Ez a távolság ismert módon szerkeszthető, így az

$$AA_1=a+\frac{bd}{c}=\frac{ac+bd}{c}$$

távolság, és ezen az A-tól a távolságra levő B pont is.

A C pont B-től b távolságra van, A_1-től és A-tól való távolságának aránya pedig $CA_1/CA=b/c$. Így C mint a B középű, b sugarú k_1 kör, és az A_1 és A pontokhoz és a b/c arányhoz tartozó k_2 Apollóniosz-kör metszéspontja adódik; az utóbbi helyett, $b=c$ esetén, AA_1 felező merőlegese veendő. Elég az egyik metszéspontot venni, mert a másik az AA_1-re szimmetrikus négyszöget ad.

Végül mérjük rá AC-re az AC egyenes ellenkező partján, mint amelyiken B van, C-ben az $A_1CB\sphericalangle$-et, A-ban pedig a $CA_1B\sphericalangle$-et, száraik metszéspontja D.

Az $ABCD$ négyszög, ha létrejön, megfelel a feltételeknek, mert konvex, továbbá $ADC\triangle\sim A_1BC\triangle$, mert megfelelő szögeik egyenlők, tehát

$$AD=\frac{AC}{A_1C}\cdot A_1B=\frac{c}{b}\cdot d\cdot\frac{b}{c}=d,\qquad CD=\frac{AC}{A_1C}\cdot CB=\frac{c}{b}\cdot b=c,$$

és $AB=a$, $BC=b$ a szerkesztés szerint. Ugyancsak az ADC és $A_1BC\triangle$-ek hasonlóságából következik, hogy $ADC\sphericalangle=A_1BC\sphericalangle=180°-ABC\sphericalangle$, tehát a kapott négyszög húrnégyszög.

A szerkeszthetőség feltétele az, hogy a k_1 és k_2 köröknek legyen metszéspontjuk. Legyen a k_1 körnek az AA_1 egyenesen levő két metszéspontja P_1 és P_2 (P_1 van A-hoz közelebb), a k_2 körnek AA_1-en levő metszéspontjai pedig Q_1 és Q_2 (Q_1 van A-hoz közelebb). Tegyük fel, hogy $c>b$, ekkor k_2 középpontja az AA_1 szakasz A_1-en túli meghosszabbításán van. k_1 középpontja viszont, B, az AA_1 szakasz belső pontja, ezért k_1-nek és k_2-nek akkor és csak akkor van (két) metszéspontja, ha P_1, Q_1, P_2, Q_2 ebben a sorrendben követik egymást, vagyis ha teljesül az

$$AP_1<AQ_1<AP_2<AQ_2$$

egyenlőtlenség (AP_1-et szükség esetén előjellel együtt értve).

Könnyen látható, hogy ez az oldalak közti

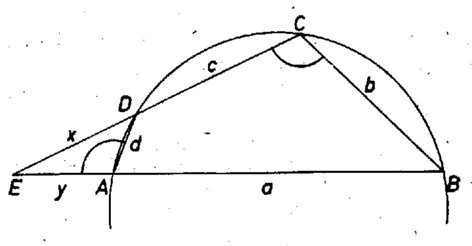
$$a-b<\frac{ac+bd}{b+c}<a+b<\frac{ac+bd}{c-b}$$

egyenlőtlenség teljesülését követeli. Mármost egyszerű számítás mutatja, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha az a, d, c oldal mindegyike kisebb a többi három adott oldal összegénél ($AP_1<AQ_1$,-ből az a oldal, s í. t.), ekkor pedig még inkább áll ez b-re. A $b=c$ eset hasonló átgondolását az olvasóra hagyjuk.

E feltételek teljesülése és az oldalak sorrendjének megadása esetén a feladatnak egy megoldása van. (Természetesen, ha az oldalak sorrendjét nem írtuk elő, akkor a megoldások száma nőhet, megegyezik a szakaszokból képezhető, lényegesen különböző sorrendek számával.)

Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Abban az esetben, ha a négyszög mindkét szemben fekvő oldalpárja egyenlő, a húrnégyszög téglalap, ami könnyen megszerkeszthető. Az ellenkező esetben van olyan két szemközti oldala, melyek meghosszabbításai metszik egymást; az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az AB és CD oldalak ilyenek, legyen a metszéspontjuk E (2. ábra).



2. ábra

Könnyű belátni, hogy $b > d$, vagy $d > b$ aszerint, hogy E az A, ill. a B csúcshoz van közelebb; feltesszük, hogy $b > d$.

EAD és ECB hasonló háromszögek, hiszen E-nél közös szögük van, továbbá $EAD\sphericalangle = ECB\sphericalangle$, mivel mindkettő a $DAB\sphericalangle$ kiegészítő szöge. Bevezetve az $EA = y$ és $ED = x$ jelöléseket,

$$\frac{y}{x+c} = \frac{d}{b} \qquad \text{és} \qquad \frac{y}{x} = \frac{x+c}{y+a},$$

ahonnan az egyetlen pozitív megoldás:

$$x = d\cdot\frac{ab+cd}{b^2-d^2}, \qquad y = d\cdot\frac{ad+bc}{b^2-d^2},$$

két ismert módon megszerkeszthető szakasz. Ezekből megszerkesztve az $EAD\triangle$-et az EA oldal A-n túli meghosszabbítására felmérjük az $AB = a$ szakaszt, majd B-ben a BE félegyenesre, a D-t tartalmazó oldalon az $ADE\sphericalangle$-et és az új szárnak az ED egyenessel való metszéspontját C-vel jelöljük. Így $EBC\triangle \sim EDA\triangle$, és ezért az $ABCD$ négyszög oldalai :

$$BC = DA\cdot\frac{y+a}{x} = b,$$
$$CD = EA\cdot\frac{BC}{DA} - ED = y\cdot\frac{b}{d} - x = c,$$

végül $DA = d$, $AB = a$. Másrészt az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mert

$$ABC\sphericalangle + ADC\sphericalangle = EDA\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180^\circ,$$

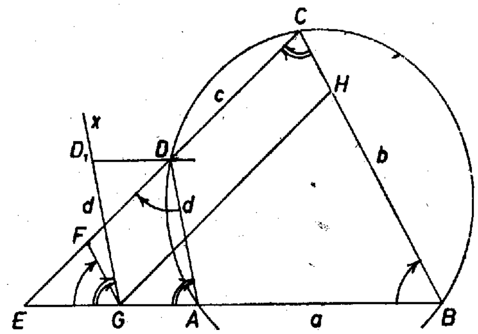
tehát $ABCD$ megfelel a feladat követelményeinek.

A szerkeszthetőség egyetlen feltétele, hogy az $EAD\triangle$ létrejöjjön, mert így B és C mindig – éspedig egyértelműen – megszerkeszthetők. A háromszög létrejön, ha $x + y > d$, $x + d > y$ és $y + d > x$, amiből egyszerű számítással arra jutunk, hogy rendre b, c, a nagyobb legyen a többi három oldal összegénél. (Ekkor pedig ugyanez d-re is teljesül.)

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. A II. megoldást úgy módosítjuk, hogy az x, y szakaszoknál egyszerűbben megszerkeszthető szakaszokat kelljen felhasználnunk. Az ottani jelöléseket tovább használjuk.

Tekintsük azt a hasonlósági transzformációt, amely az $EBC\triangle$-et az $EDA\triangle$-be viszi át (tükrözés a $BEC\sphericalangle$ szögfelezőjére és kicsinyítés d/b arányban). Vigye át ez az $EDA\triangle$-et az $EGF\triangle$-be (vagyis az A, B, C, D pontot rendre az F, D, A, G pontba).



3. ábra

Ekkor egyrészt (3. ábra)

$$\frac{FD}{AB} = \frac{GA}{DC} = \frac{AD}{CB} \left(= \frac{d}{b}\right) = \frac{FG}{AD}, \qquad \text{azaz}$$
$$FD = \frac{ad}{b}, \qquad GA = \frac{cd}{b}, \qquad FG = \frac{d^2}{b},$$

másrészt $GF||BC$, mert az $EGF\sphericalangle$-gel való elfordulás irány és nagyság szerint egyenlő az $ADE\sphericalangle$ elfordulással, ez pedig az $ABC\sphericalangle$-nyi elfordulással.

Ezek szerint a $BCFG$ négyszög trapéz, egy oldala adott, és további három oldalának hosszát megszerkeszthetjük. Így magát a trapézt is, abból pedig a keresett négyszöget.

Ha ugyanis H a BC szakasznak az a pontja, amelyre $GH||FC$, akkor

$$GH = FC = FD + DC = \frac{ad}{b} + c, \quad GB = GA + AB = \frac{cd}{b} + a$$
$$BH = BC - FG = b - \frac{d^2}{b}.$$

Ezekből megszerkesztve a $GBH\triangle$-et, a BH félegyenesre felmérve $BC = b$-t, a C-n átmenő, HG-vel párhuzamos egyenesből BC kimetszi E-t, a G-n át BH-val párhuzamosan húzott egyenes F-et. Mérjük fel ezután a G pontban a $BCE\sphericalangle$-gel egyenlő és megegyező irányú EGX szöget és a GX szárra a $GD_1 = d$ szakaszt, ekkor a D_1-en átmenő, EB-vel párhuzamos egyenes EC-ből kimetszi a D csúcsot, az ezen átmenő, D_1G-vel párhuzamos egyenes pedig EB-ből az A csúcsot.

Így egyrészt $ABCD$ húrnégyszög, mert A-nál levő külső szöge egyenlő a C-nél levő szögével, egyszersmind az EFG szöggel, tehát másrészt az E-nél közös szögű EGF, EDA és $EBC\triangle$-ek hasonlók, és mivel $GF = BC - BH = d^2/b$, azért $GF : DA = DA : BC = d/b = 1/\lambda$, tehát ugyanaz a hasonlósági transzformáció viszi át az $EGF\triangle$-et az $EDA\triangle$-be, mint EDA-t az $EBC\triangle$-be (vagyis a G, F, D, A pontnégyest D, A, B, C-be). A transzformáció az első négyes további szakaszait is a λ-szorosukra nyújtja: $AB = \lambda \cdot FD$, $DC = \lambda \cdot GA$, ezért az AB, DC szakaszokra fennáll:

$$GA + AB = \frac{DC}{\lambda} + AB = GB = \frac{c}{\lambda} + a,$$
$$FD + DC = \frac{AB}{\lambda} + DC = FC = GH = \frac{a}{\lambda} + c.$$

Az elsőből, majd a másodikat is felhasználva

$$AB - a = \frac{1}{\lambda}(c - DC) = \frac{1}{\lambda^2}(AB - a),$$

és mivel $\lambda > 1$, $AB = a$ és $DC = c$. Tehát az $ABCD$ négyszög az, amit szerkesztenünk kellett.