

Állítsuk be tetszőlegesen a kapcsolókat, és jelöljük az ekkor égő lámpát L_1 -gyel. Majd kapcsoljuk át sorban és egyenként az egyes kapcsolókat egy másik állásba, és jelöljük K -val azt a kapcsolót, amelynek átkapcsolásakor az L_1 először alszik ki, és egy másik, L_2 lámpa gyullad fel. (Ilyen K kapcsoló valóban van, hiszen legkésőbb, mire az utolsó kapcsolót is átállítottuk, a II. feltétel miatt már biztosan más lámpa ég, mint eredetileg.) Jelöljük a K kapcsoló eredeti állását A_1 -gyel, új állását A_2 -vel, a többi kapcsolónak közvetlenül a K átkapcsolása előtti állásaiból álló rendszert pedig T_1 -gyel. Eszerint a talált K kapcsoló A_1 és a többi kapcsoló T_1 állása mellett az L_1 lámpa ég, a K kapcsoló állását A_2 -re változtatva – míg a többi változatlanul a T_1 helyzetben marad – az L_2 lámpa ég. Jelöljük továbbá a K kapcsoló harmadik állását A_3 -mal, a harmadik lámpát L_3 -mal.

Világos, hogy csak K lehet az a kapcsoló, amelynek az állása egymagában meghatározza, hogy melyik lámpa ég. A K -tól különböző kapcsolók egy tetszés szerinti állását T -vel jelölve, azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha K -t az A_i helyzetbe állítjuk ($i = 1, 2$ vagy 3) és a többi kapcsolót a T állásba – ezt a továbbiakban röviden a TA_i , állásnak nevezzük –, akkor az L_i lámpa ég.

Ehhez segítségül vesszük a K -tól különböző kapcsolók két további helyzetét: egy olyan T_2 helyzetet, amelyben mindegyik másképp áll, mint T_1 -ben és másképp, mint T -ben, továbbá azt a T_3 helyzetet, amelyben mindegyik kapcsoló másképp áll, mint T_1 -ben és másképp, mint T_2 -ben. Mivel mindegyik kapcsolónak 3 lehetséges állapota van, így van ilyen T_2 (lehet esetleg több is), és T_1 -hez és T_2 -höz egy egyértelműen meghatározott T_3 tartozik.

Ha megmutatjuk, hogy a T_2A_i állásnál az L_i lámpa ég $i = 1, 2, 3$ -ra, ebből már következik, hogy a TA_i állásnál is az L_i lámpa ég, hiszen ha j és k jelenti az 1, 2, 3 közül az i -től különböző értékeket, akkor a T_2A_j és T_2A_k állásnál az L_j és L_k lámpa ég, továbbá mindkét állásban mindegyik kapcsoló helyzete más, mint a TA_i állásban, tehát az utolsó kapcsolóállásnál csak L_i éghet.

Az világos, hogy a T_2A_3 állásban csak az L_3 lámpa éghet, mert ebben az állásban minden kapcsoló másképp áll, mint T_1A_1 -ben és másképp, mint T_1A_2 -ben. Ugyanilyen okból a T_3A_3 állásnál is csak L_3 éghet. Azonban a T_2A_1 állásnál minden kapcsoló másképp áll, mint T_1A_2 -nél és másképp, mint T_3A_3 -nál, tehát ekkor L_1 -nek kell égnie; T_2A_2 -nél pedig minden kapcsoló másképp áll, mint T_1A_1 -nél, és másképp, mint T_3A_3 -nál, tehát ekkor L_2 ég.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A feladat érdekessége, hogy az állítás helyessége belátható hasonló gondolatmenettel, ha 3-nál több kapcsolóállás és ugyanannyi lámpa van; két kapcsolóállás és lámpa és 2-nél több kapcsoló esetén azonban nem igaz az állítás. Pl. 3 kapcsoló esetén az $A_1A_1A_1$, $A_1A_1A_2$, $A_1A_2A_1$, $A_2A_1A_1$, állásoknál éghet az első lámpa, a többinél a másik. Ez esetben egyik kapcsoló állása sem határozza meg egymagában, hogy melyik lámpa ég.