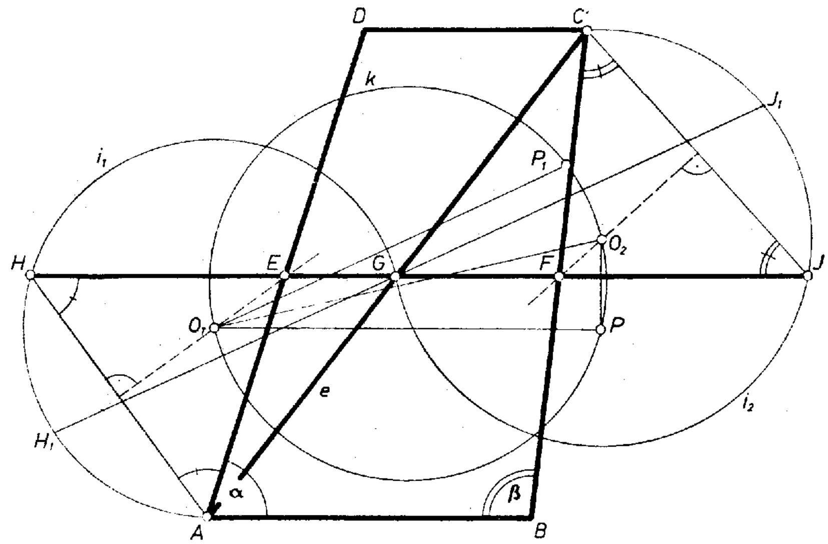
I. megoldás. Megkísérlünk egy a kerülettel összefüggő távolságot feltüntetni az ábrán. Legyen a keresett trapéz $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $DAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ az adott szögek és $AC = e$ az adott átló. Az EF középvonal hossza $(AB{+}CD)/2$ és ez a G felezőpontjában metszi AC-t. Ha még felmérjük EF meghosszabbításaira az $EH = AD/2 = EA$ és $FJ = BC/2 = FC$ szakaszokat, akkor a HJ szakasz hossza a kerület fele (1. ábra).



1. ábra

Az AC átló felére támaszkodó AHG és CJG háromszögekben egy-egy szöget is ismerünk, ugyanis az AEH egyenlő szárú háromszög E-nél levő külső szöge $180^\circ - \alpha$ nagyságú, így $AHG\sphericalangle = 90^\circ - \alpha/2$ hasonlóan $CJG = \beta/2$. Ezek szerint H az AG feletti, $90^\circ - \alpha/2$ látószögű köríven van, J pedig a GC-hez tartozó $\beta/2$ látószögű köríven. Mivel H és J az AC egyenes ellenkező partján van, elég egy-egy látószögkörívet megrajzolni az AC egyenes ellenkező partjain. Legyen a két körív középpontja O_1, ill. O_2. Ezek merőleges vetülete HJ-n egy $HJ/2 = k/4$ hosszúságú szakaszt határoz meg. O_1 merőleges vetületét az O_2-ből HJ-re bocsátott merőlegesen P-vel jelölve, ez az O_1O_2 átmérőjű körön van, és O_1P hossza is $k/4$.

Ezek alapján a következő szerkesztésre jutunk:

1. Egy e hosszúságú AC szakasznak megszerkesztjük a G felezőpontját és AG, ill. GC fölé az egyenes ellenkező oldalán egy $90^\circ - \alpha/2$, ill. egy $\beta/2$ látószögű, i_1, ill. i_2 körívet; középpontjaik legyenek O_1, ill. O_2.

2. Az O_1O_2 átmérőjű k_0 kört elmetsszük az O_1 körüli $k/4$ sugarú körrel. A metszéspontok legyenek (ha $k/4 < O_1O_2$) P és P_1. Ha $O_1O_2 = k/4$, akkor O_2 tekintendő P-nek, ha $O_1O_2 > k/4$, akkor a feladatnak nincs megoldása.

3. A G-n át O_1P-vel (ill. O_1P_1-gyel) húzott párhuzamos messe még k_1-et H-ban (ill. H_1-ben), k_2-t J-ben (ill. J_1-ben).

4. $AH(AH_1)$ és CJ (CJ_1) felező merőlegesének HJ-vel H_1J_1-gyel) való metszéspontja legyen E, ill. F (E_1, ill. F_1). Ha az előbbi HG-re (H_1G-re), az utóbbi GJ-re (GJ_1-re) esik, akkor ezek az AD (AD_1), ill. BC (B_1C) oldalak felező pontjai. Különben a feladatnak ismét nincs megoldása.

5. AE (AE_1) a C-ből, CF (CF_1) pedig az A-ból HJ-vel (H_1J_1-gyel) húzott párhuzamosból kimetszi D-t, ill. B-t (D_1-et, ill.B_1-et).

Az elemzés lépéseinek megfordításával könnyen látható, hogy a nyert trapéz megfelel a szerkesztés kívánalmainak. Mint láttuk, a feladatnak 2, 1 vagy 0 megoldása lehet.

Váli László (Budapest, I. István Gimn.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel

II. megoldás. Ha $\alpha + \beta = 180^\circ$, akkor paralelogrammát kell szerkesztenünk, ami visszavezethető a következő feladatra: szerkesszük meg a háromszöget, ha adott egy oldala, a másik két oldal összege és a köztük levő szög; ennek megoldása elég ismert, itt nem foglalkozunk vele tovább.

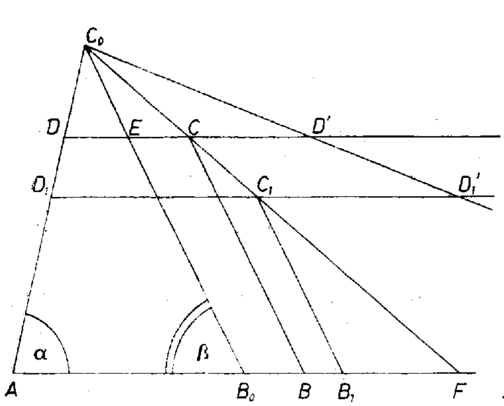
Ha $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, akkor feltehetjük, hogy $\alpha + \beta < 180^\circ$, mert a trapéz mindegyik szöge ismert, és az egyik alapon levő két szögre ez az egyenlőtlenség teljesül.

Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül az AC átlót. Megrajzolva néhány, a többi feltételeket kielégítő trapézt úgy, hogy AB és AD oldalegyenesük közös legyen: a C csúcsok egy egyenesen látszanak sorakozni. Ha ez a megfigyelés helyes, akkor a szerkesztés könnyen elvégezhető, ezért először megfigyelésünket igazoljuk.

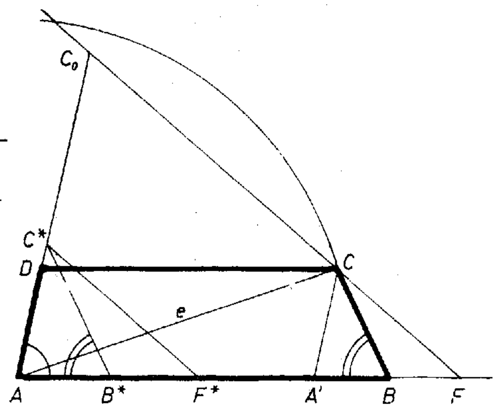
Rajzoljunk k kerületű AB_0C_0 háromszöget, amelyben $C_0AB_0\sphericalangle = \alpha$ és $C_0B_0A\sphericalangle = \beta$. Legyen $ABCD$ egy k kerületű trapéz, melynek B és D csúcsa az AB_0 félegyenesen, ill. az AC_0 szakaszon van, és $BC \parallel B_0C_0$. Jelöljük B_0C_0 és CD metszéspontját E-vel. Ekkor $BC = B_0E$, s így (2. ábra)

$$B_0B + CD = B_0B + CE + ED = 2CE + ED = DC_0 + C_0E.$$

Eszerint ha a DC szakaszt meghosszabbítjuk C-n túl a kétszeresére, a keletkező DD' szakasz a DEC_0 háromszög kerületével egyenlő. Ha egy másik, k kerületű $AB_1C_1D_1$ trapézból indulunk ki, a C_0DD' és a megfelelő $C_0D_1D_1'$ háromszög hasonló lesz, mert D-nél, ill. D_1-nél levő szögük α, és az ezt közrefogó oldalak aránya egyenlő (megegyezik pl. az AB_0C_0 háromszög AC_0 oldalának és kerületének az arányával).



2. ábra



3. ábra

Azt nyertük, hogy azoknak a k kerületű $ABCD$ trapézoknak a C csúcsa, amelyek AB oldala az AB_0 félegyenesen van és ezen fekvő szögeik α és β, egy a C_0-ból induló egyenesszakaszon, a C_0DD' háromszög súlyvonala egyenesének az A_0B_0 egyenesig terjedő C_0F szakaszán van. Itt AF az AB_0G_0 háromszög kerületének fele, $k/2$. Meggondolásunk a következő szerkesztésre vezet:

Szerkesszünk olyan AB^*C^* háromszöget, amelynek A-nál és B^*-nál levő szöge α, ill. β, és mérjük rá AB^*-ra a háromszög kerületének felével egyenlő AF^* szakaszt, továbbá a $k/2$ hosszúságú AF szakaszt (3. ábra).

Az F-en át F^*C^*-gal párhuzamosan húzott félegyenest messük az A körüli e sugarú körívvel. Aszerint, hogy 2, 1 vagy 0 metszéspont (ill. az érintési pont) esik az AC^*-gal való C_0 metszéspont és F közti szakaszra, a feladatnak 2, 1, 0 (ill. 1) megoldása van.

Az $ABCD$ trapéz AC átlójának hossza e, A-nál és B-nél levő szöge α és β, azt kell még belátnunk, hogy kerülete k. Messe a C-ből DA-val húzott párhuzamos AB-t A'-ben, ekkor $A'BC\Delta \sim AB^*C^*\Delta$ és $A'FC\Delta \sim AF^*C^*\Delta$ így

$$\begin{aligned} A'F/A'C = AF^*/AC^* &= (AB^* + B^*C^* + C^*A^*)/2AC^* = \\ &= (A'B + BC + CA')/2A'C. \end{aligned}$$

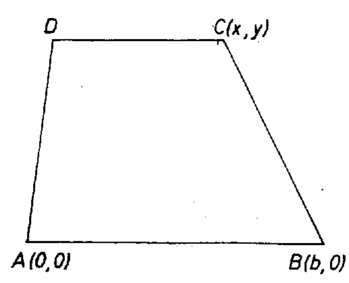
Egy ilyen C metszéspontból az AB^*-gal húzott párhuzamos metszi ki AC^*-ból D-t a B^*C^*-gal húzott párhuzamos pedig AF-ből B-t.

$EE' = AA' = CD$, amiből adódik, hogy a trapéz kerülete k. A többi tulajdonság szerkesztés szerint teljesül.

Beck József (Budapest, I. István Gimn.)
dolgozata alapján, egyszerűsítésekkel, kiegészítésekkel

Megjegyzések. **1.** Egy megoldás van, ha e az AFF_1 háromszög A-ból húzott magasságával egyenlő, vagy ha az AE és AF közül a kisebbiknél nem kisebb, de a nagyobbiknál kisebb; két megoldás van, ha a mondott magasság és kisebbik oldal közé esik, különben nincs megoldás. Ezek a távolságok kifejezhetők α, β és k segítségével, azonban a számolást itt mellőzzük.

2. A C pontok mértani helyét könnyen megállapíthatjuk koordináták segítségével.



4. ábra

Legyen az A pont az origóban, B a $(b, 0)$ pont, az AD, BC oldalak meredeksége m_1, m_2. A C pont (x, y) koordinátáira keresünk összefüggést. y a trapéz magassága, másrészt mivel C a BC egyenesen van,

$$y = m_2(x - b), \quad \text{ahonnan} \quad b = x - \frac{y}{m_2},$$

és D koordinátái $(y/m_1, y)$. A trapéz kerülete

$$k = x - \frac{y}{m_2} + y\sqrt{1+\frac{1}{m_2^2}} + x - \frac{y}{m_1} + y\sqrt{1+\frac{1}{m_1^2}} =$$
$$= 2x + y\left(\sqrt{1+\frac{1}{m_1^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{m_2^2}} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right),$$

ami valóban egyenes egyenlete. Ennek az a szakasza ad trapézt, amelyre teljesül, hogy $0 < y < m_1 x$. (Feltettük, hogy α, β, egyike sem derékszög.)