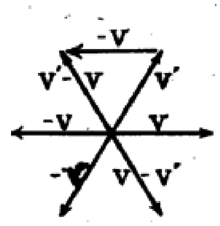
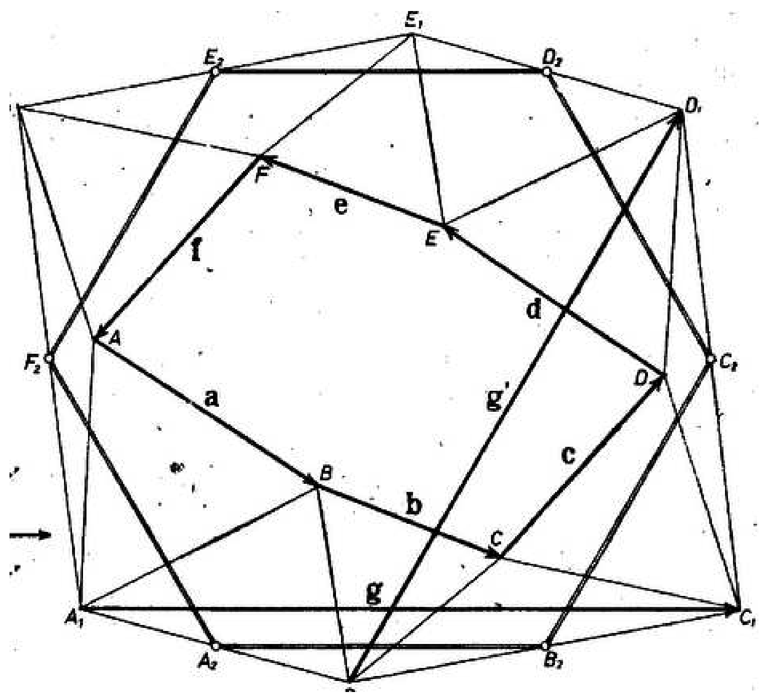
I. megoldás. Egy hatszög akkor (és csak akkor) centrálszimmetrikus, ha szemközti oldalai páronként párhuzamosak és egyenlők, ezért elegendő azt bizonyítani, hogy a kiindulási hatszögben ez a tulajdonság fennáll. A bizonyítást vektorokkal végzett számítás útján végezzük el. Ennek során azt a vektort, amely egy tetszés szerinti $\mathbf{v}$ vektorból pozitív irányú, $60°$-os elforgatással adódik, $\mathbf{v}'$-vel fogjuk jelölni. Így a $\mathbf{v}$-ből $120°$, $180°$, $240°$, $300°$ szögű elforgatással adódó vektor rendre $(\mathbf{v}')' = \mathbf{v}'' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$; $\quad -\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}'$, $\quad \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ (1. ábra).



1. ábra

Legyenek a kiindulási, pozitív körüljárású $ABCDEF$ hatszög oldalvektorai rendre $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, …, $\overrightarrow{FA} = \mathbf{f}$, az ezek fölé kifelé szerkesztett szabályos háromszögek új csúcsai rendre A_1, B_1, …, F_1, az A_1B_1, …, F_1A_1 oldalfelező pontjai rendre A_2, …, F_2 (2. ábra).



2. ábra

Az $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{B_2C_2}$ vektor fele akkora, mint $\overrightarrow{A_1C_1}$, ill. $\overrightarrow{B_1D_1}$, a föltevés szerint pedig $\overrightarrow{B_2C_2}$ az $\overrightarrow{A_2B_2}$-ból $+60°$-os elfordítással áll elő, ezért $\overrightarrow{A_1C_1} = \mathbf{g}$ jelöléssel $\overrightarrow{B_1D_1} = \mathbf{g}'$. Másrészt

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1},$$

itt $\overrightarrow{A_1B} = -\overrightarrow{BA_1} = \mathbf{a}'$, és $\overrightarrow{CC_1} = \mathbf{c} - \mathbf{c}'$, tehát

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}') = \mathbf{g}, \tag{1}$$

és hasonlóan B_1D_1 felbontása alapján

$$\mathbf{b}' + \mathbf{c} + (\mathbf{d} - \mathbf{d}') = \mathbf{g}'. \tag{2}$$

Az utóbbi vektort negatív irányban $60°$-kal elfordítva a jobb oldalon visszakapjuk $\mathbf{g}$-t, a bal oldal tagjait pedig az 1. ábra szerint képezzük:

$$\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}') - \mathbf{d}' = \mathbf{g}, \tag{3}$$

és ezt (1)-gyel egybevetve

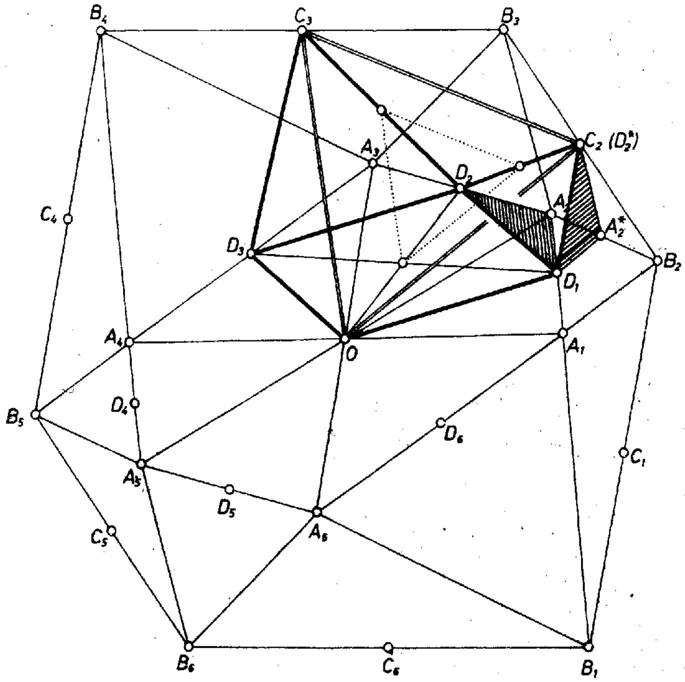
$$\mathbf{a}' = -\mathbf{d}', \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{a} = -\mathbf{d},$$

vagyis szavakkal: $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DE}$ egyenlő irányúak és abszolút értékűek, továbbá ellentétes irányításúak. Ez állításunk része.

Mivel végül AB-vel, ill. $\mathbf{a}$-val az eredeti hatszög tetszés szerinti oldalát jelöltük, és a feltevés kihasznált része az $A_2B_2 \dots F_2$ hatszög bármelyik két, egymás utáni oldalára fennáll, megállapításunk az eredeti hatszög bármelyik két, szemben fekvő oldalára érvényes, a bizonyítást befejeztük.

Göndőcs Ferenc (Győr, Révai M. Gimn.)

II. megoldás. Az eredeti hatszög csúcsait jelöljük A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6-tal, az A_6A_1 szakasz fölé előírt módon rajzolt szabályos háromszög csúcsát B_1-gyel, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 pedig legyen a további háromszögek csúcsa. A B_1B_2, ill. A_1A_2 szakasz felezőpontja legyen C_1, ill. D_1, a C_2, C_3, C_4; C_5, C_6, ill. D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 pont pedig a további oldalszakaszok felezőpontja a származtatott, ill. az eredeti hatszögben (3. ábra).



3. ábra

Egészítse ki a D_1, D_2, D_3 pontokat paralelogrammává az O pont (O tehát D_2-nek a D_1D_3 szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe). Megmutatjuk, hogy a C_2C_3O háromszög szabályos, tehát O a $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hatszög középpontja, és így O helyzete nem függ attól, hogy melyik három felezőpontból származtatjuk. Feladatunk állítását ennek alapján már könnyen bebizonyíthatjuk.

Először azt mutatjuk meg, hogy a $D_1C_2D_2$ háromszög szabályos. Feltehetjük, hogy az eredeti hatszög körüljárása pozitív. Forgassuk el a $D_1A_2D_2$ háromszöget D_1 körül negatív irányban $60°$-kal. Az A_2, D_2 csúcsok új helye legyen A_2^*, D_2^*. Ekkor a $D_1A_2^*$, $A_2^*D_2^*$ szakaszok rendre párhuzamosak az A_1B_2, A_2B_3 szakaszokkal és egyenlők azok felével, $D_1A_2^*$ tehát az $A_1B_2A_2$ háromszög középvonala, $A_2^*D_2^*$ pedig a $B_2B_3A_2$ háromszögé, azaz C_2 és D_2^* azonosak: D_2-t a D_1 körüli $60°$-os forgatás C_2-be viszi, $D_1C_2D_2$ tehát szabályos háromszög.

Azt bizonyítottuk be, hogy a csatlakozó A_1A_2 és A_2A_3 szakaszok D_1 és D_2 felezőpontja, és a szakaszok fölé rajzolt $A_2A_1B_2$ és $A_3A_2B_3$ szabályos háromszögek harmadik csúcsai által meghatározott B_2B_3 szakasz C_2 felezőpontja a $D_2D_1C_2$ szabályos háromszöget határozza meg, ha $A_2A_1B_2$ és $A_3A_2B_3$ körüljárása megegyezik.

Eredményünkből következik, hogy a $D_3D_2C_3$ háromszög is szabályos, és a C_2D_2, D_2C_3 szakaszok fölé rajzolt $C_2D_2D_1$, $D_2C_3D_3$ szabályos háromszögek D_1, D_3 csúcsai által meghatározott szakasz felezőpontja a D_2C_2, D_2C_3 szakaszok felezőpontjaival együtt szabályos háromszöget alkot. Ezt a háromszöget a D_2 centrumból kétszeresére nagyítva épp az OC_2C_3 háromszöget kapjuk, ez tehát szabályos háromszög.

Hasonló módon kapjuk, hogy a D_2, D_3, D_4 csúcsokat paralelogrammává kiegészítő O' csúcs a C_3, C_4 csúcsokkal együtt szabályos háromszöget alkot, ha tehát C_2, C_3, C_4 egy szabályos hatszög csúcsai, akkor O és O' azonosak. A D_1O, OD_4 szakaszok tehát párhuzamosak és egyenlők a D_2D_3 szakasszal, és ez az utóbbi az $A_2A_3A_4$ háromszög középvonala. A D_1D_4 és A_2A_4 szakaszok tehát párhuzamosak és egyenlők, így az $A_1A_2A_4A_5$ négyszög paralelogramma (hiszen a D_1D_4 középvonal párhuzamos és egyenlő az A_2A_4 oldallal) és e paralelogramma centruma épp az O pont.

Hasonló módon láthatjuk be, hogy az eredeti hatszög további szemközti oldalpárjai is olyan paralelogramma oldalai, melynek középpontja a $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ szabályos hatszög O centrumával azonos, az eredeti hatszög tehát centrálszimmetrikus.

Váli László (Budapest, I. István Gimn.)