I. megoldás. Legyen a két egyenlet további gyöke α', ill. β'. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $q=\alpha\alpha'$, $s=\beta\beta'$, tehát (1) első tagja

$$(q-k^2s)^2=\left(\alpha\alpha'-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\beta\beta'\right)^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2. \tag{2}$$

Továbbá $-p=\alpha+\alpha'$, $\quad -r=\beta+\beta'$, így a második tag:

$$\begin{aligned}k(p-kr)(kps-qr)&=\frac{\alpha}{\beta}\left[\frac{\alpha}{\beta}(\beta+\beta')-(\alpha+\alpha')\right]\cdot\left[\alpha\alpha'(\beta+\beta')-\frac{\alpha}{\beta}(\alpha+\alpha')\beta\beta'\right]=\\&=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\beta}(\alpha\beta+\alpha\beta'-\alpha\beta-\alpha'\beta)\cdot\alpha(\alpha'\beta+\alpha'\beta'-\alpha\beta'-\alpha'\beta')=-\frac{\alpha^2}{\beta^2}(\alpha'\beta-\alpha\beta')^2.\end{aligned} \tag{3}$$

(2) és (3) összege a bizonyítandó (1) azonosságot adja.

Fialovszky Alice (Budapest, Patrona Hungariae Gimn.)
Máté András (Budapest, Kölcsey F. Gimn.)

II. megoldás. A fenti jelöléseket használva tekintsük a következő negyedfokú egyenletet:

$$(\beta z-\alpha)(\beta' z-\alpha)(\beta z-\alpha')(\beta' z-\alpha')=0. \tag{4}$$

Az első két tényező szorzata:

$$(\beta z-\alpha)(\beta' z-\alpha)=\beta\beta' z^2-\alpha(\beta+\beta')z+\alpha^2=sz^2+\alpha rz+\alpha^2,$$

hasonlóan a további két tényező szorzata:

$$(\beta z-\alpha')(\beta' z-\alpha')=sz^2+\alpha' rz+\alpha'^2.$$

Így (4) bal oldala alkalmas rendezéssel, alakítással:

$$\begin{gathered}(sz^2+\alpha rz+\alpha^2)(sz^2+\alpha' rz+\alpha'^2)=\\=(s^2z^4-2sz^2\alpha\alpha'+\alpha^2\alpha'^2)+(\alpha+\alpha')rsz^3+(\alpha^2+2\alpha\alpha'+\alpha'^2)sz^2+\alpha\alpha' r^2z^2+\alpha\alpha'(\alpha+\alpha')rz=\\=(s^2z^4-2sqz^2+q^2)+z(-prsz^2+p^2sz+qr^2z-pqr)=\\=(q-sz^2)^2+z(p-rz)(psz-qr).\end{gathered}$$

A (4) egyenlet bal oldala tehát a $z=k$ helyen egyenlő (1) bal oldalával. Ezen a helyen azonban (4) első tényezője 0-val egyenlő, így az egész szorzat értéke 0. Állításunkat tehát bebizonyítottuk.

Beck József (Budapest, I. István Gimn.)

Megjegyzés. Ez a megoldás azt is mutatja, hogy ha az (1) egyenlőség fennáll, akkor van az első egyenletnek egy gyöke, amelyik a második egyenlet egy gyökének k-szorosa.

III. megoldás. Feltételeink szerint $x=\beta k$ gyöke az első egyenletnek:

$$\beta^2k^2+\beta kp+q=0, \tag{5}$$

és $x=\beta$ gyöke a második egyenletnek:

$$\beta^2+\beta r+s=0. \tag{6}$$

Vonjuk le (5)-ből (6)-nak a k^2-szeresét:

$$\beta(kp-k^2r)+q-sk^2=0, \tag{7}$$

és szorozzuk meg (6)-ot $(pk-rk^2)^2$-nel:

$$\beta^2(pk-rk^2)^2+\beta r(pk-rk^2)^2+s(pk-rk^2)^2=0.$$

Írjuk be itt $\beta(kp-k^2r)$ helyére (7) alapján a vele egyenlő (sk^2-q)-t:

$$\begin{gathered}(q-sk^2)^2+r(sk^2-q)(kp-k^2r)+s(pk-rk^2)^2=0,\\(q-sk^2)^2+k(p-kr)(rsk^2-rq+spk-rsk^2)=0,\end{gathered}$$

innen összevonás után a bizonyítandó azonosságot kapjuk.

Viszkei György (Budapest, Landler J. Gépip. Techn.)

Megjegyzések. 1. Célhoz érünk úgy is, hogy (5)-nek s-szereséből levonjuk (6)-nak q-szorosát:

$$\beta\big[(k^2s-q)\beta+kps-qr\big]=0.$$

Ekkor (7)-nek $\beta(k^2s-q)$-szorosát levonva (8)-nak $(kp-k^2r)$-szereséből:

$$\beta\big[(q-sk^2)^2+(kps-qr)(kp-k^2r)\big]=0.$$

Ha itt $\beta=0$, akkor α is 0, tehát $q=s=0$, s így (1) bal oldalán is 0 áll; ha pedig a második tényező 0, az azonos (1) bal oldalával, így a feladat állítását igazoltuk.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek, hozzák kapcsolatba a problémát az 1598. feladathoz[1] fűzött 1. megjegyzés segédtételével: „ha az $a_1z^2+b_1z+c_1=0$ és az $a_2z^2+b_2z+c_2=0$ egyenleteknek van közös gyökük, akkor

$$(a_2c_1-a_1c_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1b_2-c_2b_1)=0."$$

[1]K. M. L. 37 (1968) 137. o.