A polinom előállításában szereplő összeget a

$$6y^2 + 5y - 21 = 0$$

másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja alapján szorzattá alakíthatjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei:

$$y_1 = \frac{3}{2}, \qquad y_2 = -\frac{7}{3},$$

így az $f(x)$ polinom szorzat-alakja:

$$f(x) = \left[2(x^2 + 1) - 3g(x)\right] \cdot \left[3(x^2 + 1) + 7g(x)\right]. \tag{1}$$

Állításunkkal ellentétben tegyük fel, hogy van olyan egész x_0, amelyre $f(x_0) = 0$. Ekkor a két tényező közül legalább az egyik értéke ugyancsak 0 volna az x_0 helyen.

a) Ha az első tényező 0:

$$2(x_0^2 + 1) - 3g(x_0) = 0,$$

akkor $x_0^2 + 1$ osztható volna 3-mal, hiszen $g(x_0)$ – mint egész együtthatós polinom egész helyen felvett értéke – egész szám. Ha belátjuk, hogy $x_0^2 + 1$ egyetlen egész x_0 mellett sem osztható 3-mal, akkor ellentmondásra jutunk. Valóban, x_0-t 3-mal osztva a maradék vagy 0, vagy 1, vagy 2, ekkor pedig x_0^2-et osztva 3-mal a maradék rendre 0, vagy 1, vagy 1, tehát $x_0^2 + 1$-et 3-mal osztva a maradék 1 vagy 2.

b) Ha (1) második tényezője volna 0, $x_0^2 + 1$ osztható lenne 7-tel. Hasonló módon kapjuk, hogy x_0-t 7-tel osztva a maradék 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lehet, ekkor x_0^2-t 7-tel osztva a maradék rendre 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, és $x_0^2 + 1$-et 7-tel osztva a maradék 1, 2, 5, 3, 3, 5, 2, tehát a maradék nem lehet 0. Így ismét ellentmondásra jutottunk, eredeti állításunkat tehát bebizonyítottuk.

Maróti Péter (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Martoni Viktor (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)

Megjegyzés. Megmutatható,[1] hogy az $x_0^2 + 1$ számnak csak $4k + 1$ alakú prímosztója lehet, akármilyen egész szám is x_0.

---

[1]Lásd pl. *Erdős P.-Surányi J.:* Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 47–48. o.