Legyen N tetszőleges természetes szám, s jelöljük S_N-nel az olyan, N-nél kisebb természetes számok reciprokainak összegét, melyeknek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7-es számjegy. Jelöljük m-mel azt az egész számot, melyre teljesül a

$$10^{m-1} \leq N < 10^m$$

egyenlőtlenség. Mivel minden összeadandó pozitív, azért fennáll

$$S_N < S_{10^m}.$$

Legyen végül az n-jegyű, 7-es jegyet nem tartalmazó számok reciprokainak összege s_n, így az előzők szerint

$$S_N \leq s_1 + s_2 + \ldots + s_m.$$

Az n-jegyű számok reciprokai nem nagyobbak, mint $\dfrac{1}{10^{n-1}}$. Állapítsuk meg, hány n-jegyű szám jegyei között nincs 7-es. Az első jegy nem lehet 0 sem, így ezt 8-féleképpen, a további $n-1$ jegy mindegyikét 9-féleképpen választhatjuk meg, tehát a vizsgált számok száma $8 \cdot 9^{n-1}$, és így

$$s_n \leq 8 \cdot 9^{n-1} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1},$$

$$S_N \leq 8\left[1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}\right] =$$

$$= 8 \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{9}{10}\right)^m}{1 - \dfrac{9}{10}} = 80\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^m\right] < 80.$$

Eszerint $K = 80$ megfelel a feladat követelményének.

Somorjai Gábor (Budapest, I. István Gimn.)

Megjegyzések. 1. Lényegesen kisebb felső korlátot kapunk, ha az ugyanannyi jeggyel írt és *egyenlő első számjegyű* számok reciprokát helyettesítjük a legkisebbjük reciprokával. Ha az n-jegyű k szám első jegye b, azaz

$$(1) \qquad b \cdot 10^{n-1} \leq k < (b+1) \cdot 10^{n-1} \quad (\leq 10^n),$$

akkor

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

és az ilyen számok közül a „7” jegyet nem tartalmazó számok száma 9^{n-1}, tehát

$$s_n \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = s_1\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 2{,}69 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}.$$

Így S_N-re az

$$S_N \leq 2{,}69\left[1 + \frac{9}{10} + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}\right] < 26{,}9$$

becslést kapjuk.

Váli László (Budapest, I. István Gimn.)

2. Hasonlóan finomíthatjuk tovább a becslést, ha pl. az első 2 jegyet vesszük tekintetbe, azonban az elvégzendő segédszámítások rohamosan nőnek.

3. Hasonló gondolatmenetekkel kaphatunk S_N-re alsó becslést is, s_n minden tagját a kisebb $1/10^n$-nel, ill. (1) alapján $1/k$-t $1/[(b+1)10^{n-1}]$-nel helyettesítve. Az utóbbi alapján pl. az adódik, hogy ha N-et elég nagynak választjuk, akkor S_N a 18,8 korlát felett lesz. Az első 2 jegyet tekintetbe véve pedig az adódik, hogy ha már N elég nagy, akkor

$$22{,}03 < S_N < 22{,}9.$$

4. Mindezek a meggondolások átvihetők minden lényegbeli változtatás nélkül arra az esetre, ha tetszőleges (1-nél nagyobb) g alapszámú számrendszerben felírt olyan természetes számok reciprokának összegét vizsgáljuk, amelyekben egy adott számjegy nem fordul elő.

Soós Miklós (Budapest, Fazekas M. Gyakorló Gimn.)

5.Gépi számítással

$$S_9 = 2{,}686\,11\ldots, \; S_{99} = 4{,}701\,65\ldots, \; S_{999} = 6{,}483\,88\ldots, \; S_{9999} = 8{,}084\,83\ldots$$