I. megoldás. Kíséreljünk meg megtervezni egy kívánt tulajdonságú autóbusz-hálózatot. Készítsünk táblázatot az autóbuszvonalakról, amelyeket kis betűkkel fogunk jelölni és egymás alá írunk, és a megállókról, amelyeket nagy betűkkel jelölünk és a táblázat tetején tüntetünk fel egymás után. Ha pl. az a járatnak megállója a A állomás, akkor az a sorában az A alatti mezőbe 1-est írunk, különben semmit.

Az üres táblázat – hogy ti. nem közlekedik autóbusz a városban –, valamint az egyetlenegy járat, természetesen kielégíti az I., II., III. feltételeket, ezeket mégis figyelmen kívül hagyjuk, mivel a feladat a város autóbuszjáratairól, tehát többről szól.

Ekkor kell lennie legalább két járatnak – jelöljük a-val és b-vel –, ezeken egy közös megállónak, A-nak, az elsőn még két megállónak, B-nek és C-nek, a másodikon két, az előbbiektől különböző megállónak, D-nek és E-nek. Így táblázatunk következő részét kapjuk:

	A	B	C	D	E
a	1	1	1		
b	1			1	1

Táblázatunk azonban kiegészítésre szorul, hiszen III. szerint kell lennie B-t D-vel és B-t E-vel összekötő járatnak, és ahhoz, hogy II. teljesüljön, ezek nem mehetnek át A-n, C-n, E-n, ill. A-n, C-n, D-n, és egymással sem lehet közös megállójuk B-n kívül. Így ezen a c, ill. d vonalon van egy-egy újabb F, ill. G megálló. Eddig nyert táblázatunk tehát:

	A	B	C	D	E	F	G
a	1	1	1				
b	1			1	1		
c		1		1		1	
d		1			1		1

A III. feltétel szerint kell lennie olyan járatnak, mely az A és F megállókat köti össze, jelöljük ezt e-vel. Akkor B, C, D és E nem lehetnek megállói e-nek, hiszen az ellenkező esetben e-nek és a-nak, ill. e-nek és b-nek két közös megállója lenne. Mivel e-nek és d-nek is kell, hogy közös megállója legyen, így e harmadik megállója csak G lehet.

Hasonlóan a fentiekhez, létezik olyan járat, mely C-t és D-t köti össze, jelöljük ezt f-fel. Mivel f-nek az a, b és c mindegyikével közös megállója C és D egyike, továbbá sem C, sem D nem megállója d-nek, így f harmadik megállója G.

Az eddig megadott járatok között nincs olyan, mely C-t és E-t kötné össze. Egy ilyen g járatnak C vagy E közös megállója az a, b, d járatok bármelyikével, továbbá c-nek és g-nek is kell, hogy közös megállója legyen, így F is a g járat vonalán fekszik. Egészítsük ki táblázatunkat a fentiekkel.

	A	B	C	D	E	F	G
a	1	1	1				
b	1			1	1		
c		1		1		1	
d		1			1		1
e	1					1	1
f			1	1			1
g			1		1	1	

Könnyű látni, hogy táblázatunk a feladat feltételeit kielégítő hálózatot ír le. További járat nem létezhet, mert egy ilyen h járat – ha további H megálló is létezik – kösse össze A-t és H-t. Könnyű látni, hogy h-nak nem megállója B, C, D, E, F, G egyike sem. Viszont ekkor h-nak a c, d, f, g járatok egyikével sincs közös megállója, tehát h és H nem is létezhet. Így táblázatunk a megállók és járatok megfelelő betűzése mellett az egyetlen olyan autóbuszhálózatot reprezentálja, melyben a járatok száma egynél nagyobb. Így azt nyertük, hogy a város autóbuszjáratainak száma hét.

II. megoldás. Nézzük meg általánosabban, hogy hány járatra van szükség, ha az I. feltétel helyett azt kívánjuk meg, hogy

I.* minden járaton pontosan p megálló van, ahol $p \geq 2$, természetes szám.

Vizsgáljuk meg, hány megálló és autóbuszvonal lehet a városban!

Jelöljük az egyik megállóhelyen áthaladó járatok számát k-val. Mivel innen a III. feltétel szerint minden további megállóhelyre pontosan egy közvetlen járattal lehet eljutni, így I*-ból nyerjük, hogy az összes megállóhelyek száma $k(p-1)+1$. Ez azt is jelenti, hogy a város minden megállójában ugyanannyi (éspedig pontosan k) járat megy át. Jegyezzük meg, hogy $k=0$ esetén a feltételek teljesülnek, mivel ekkor nincsenek járatok, következésképpen megállóhelyek sem léteznek.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $k \geq 1$, s válasszunk ki egy tetszőleges járatot. A II. feltétel szerint az összes többi járat egy és csak egy pontban keresztezi ezt a járatot. Így, mivel a kiválasztott autóbuszvonal minden megállóján még további $k-1$ járat halad át, nyerjük, hogy az összes járatok száma $p(k-1)+1$.

Meghatározhatjuk a járatok számát a következőképpen is. Alkossunk párokat a város megállóhelyeiből. Ezt

$$\frac{[k(p-1)+1]\cdot k\cdot(p-1)}{2}$$

-féleképpen tudjuk megtenni. Mivel minden járathoz $\dfrac{p(p-1)}{2}$ olyan pár tartozik, amelyeket ő összeköt, s mivel III. szerint minden párt pontosan egy járat köt össze, így az összes járatok száma

$$\frac{[k(p-1)+1]k(p-1)}{p(p-1)}.$$

A kétféle meghatározás alapján felírhatjuk a

$$p(k-1)+1=\frac{[k(p-1)+1]\cdot k}{p}$$

egyenletet. Ebből átrendezéssel:

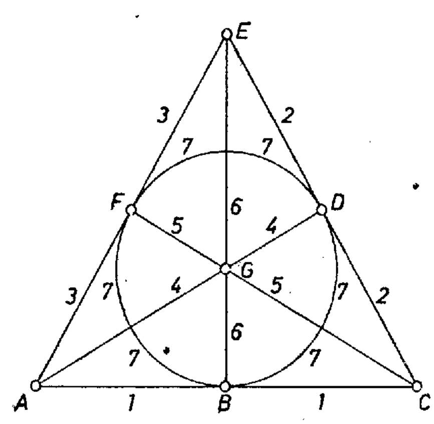
$$(p-1)(k-1)(k-p)=0. \tag{1}$$

Mivel $p\geq 2$, így vagy $k=1$, vagy $k=p$ járat megy át $1-1$ megállón.

Nyilvánvaló, hogy a $k=0$ és $k=1$ triviális esethez minden p esetén létezik hálózat, mely kielégíti az I*, II. és III. feltételeket. Mivel azonban feladatunkban (ahol $p\geq 3$), a város autóbuszjáratairól szólnak a feltételek, így feltehetjük, hogy legalább két járat van, s így a fentiek szerint egyetlen megoldás lehetséges, mégpedig az, hogy 7 járat van a városban.

Megmutatjuk, hogy ilyen hálózat konstruálható is. Jelöljük a megállókat rendre A, B, C, D, E, F, G betűkkel, és jellemezzük a járatokat azzal a három megállóval, melyeken áthaladnak:

az 1. számú járat az A, B, C,
a 2. számú járat a C, D, E,
a 3. számú járat az E, F, A,
a 4. számú járat az A, G, D,
az 5. számú járat a C, G, F,
a 6. számú járat az E, G, B,
a 7. számú járat a D, F, B megállókon halad át.



Szemléletesen mutatja ilyen hálózat létezését az ábra, ahol az 1., 2. és 3. járat egy egyenlő oldalú háromszög három oldala, a 4., 5. és 6. járat a három súlyvonal, s a 7. járat a beírt kör (lehet ennek 2/3 része is).

Váradi József (Budapest, Ságvári E. Gyak. Gimn.)

Megjegyzés. (1) azt jelenti, hogy amennyiben van autóbuszjárat a városban, akkor csak egy vagy p^2-p+1 járat lehet. Ebből azonban nem következik, hogy minden p természetes szám esetén létezik is olyan hálózat, melyben $k=p$.