I. Állítsuk elő $f(x+2a)$ értékét $f(x)$ segítségével.

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-[f(x+a)]^2},$$

és itt

$$f(x+a)-[f(x+a)]^2=f(x+a)[1-f(x+a)]=$$
$$=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}\right]=\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

Másrészt feltételünk szerint f minden valós számra értelmezve van, valós értéket vesz fel, és

$$f(x)=f\Big((x-a)+a\Big)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)+[f(x-a)]^2},$$

emiatt $f(x)\geq\frac{1}{2}$, és

$$f(x+2a)=f(x).$$

Tehát a függvény periodikus, és a periódusa $b=2a$. (Természetesen b-ként $2a$ minden egész számú többszöröse is választható.)

II. Legyen most $a=1$. Ha $f(x)=1$, akkor

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{1-1}=\frac{1}{2},$$

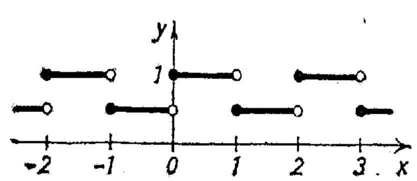
ha pedig $f(x)=\frac{1}{2}$, akkor

$$f(x+1)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=1.$$

Ezek alapján válasszuk $f(x)$ értékeit a következő módon:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } 2k\leq x<2k+1,\\ \frac{1}{2}, \text{ ha } 2k+1\leq x<2k+2,\end{cases}$$

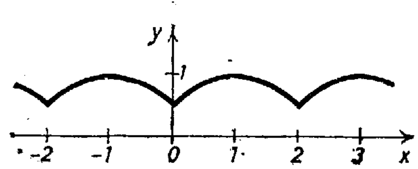
ahol k egész szám (1. ábra).



1. ábra

Könnyen látható, hogy a követelményeknek a következő függvény is eleget tesz (2. ábra):

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|.$$



2. ábra

Birkner Lajos (Budapest, Könyves Kálmán Gimn.)
Soós Miklós (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

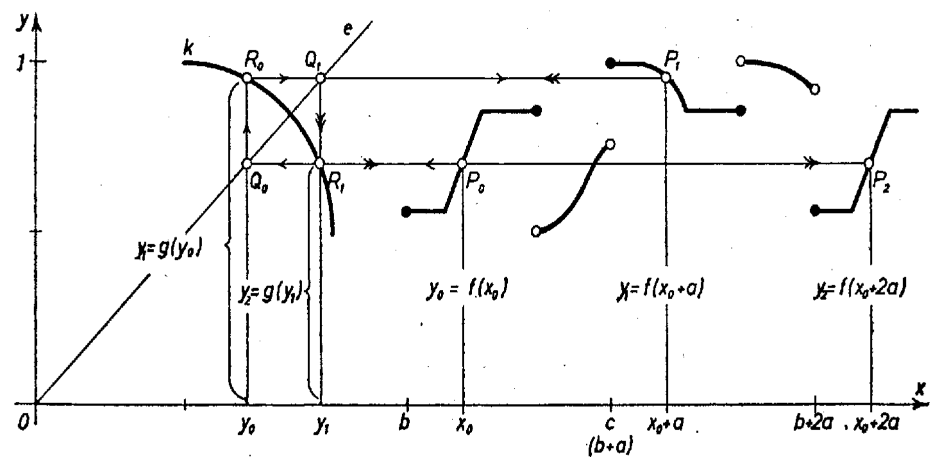
Megjegyzés. A $0 \leq x < a$ intervallumon $f(x)$ értéke tetszőlegesen megadható, csak a már felhasznált $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$, és az összefüggés értelmezhetőségét biztosító $f(x) \leq 1$ feltételeknek kell eleget tennie. Ha az x_0 helyhez az $y_0 = f(x_0)$ értéket rendeli hozzá a függvény, az $f(x_0 + a)$ helyen felvett függvényérték már egyértelműen meghatározott, nevezetesen

$$f(x_0 + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{y_0 - y_0^2}.$$

A jobb oldal a

$$g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - y^2}$$

függvénynek az y_0 helyen felvett értéke. Ennek a függvénynek a képe az $(1/2,\ 1/2)$ pont körüli, $1/2$ sugarú k kör felső íve. Ezt – ha már ismerjük $f(x)$ grafikonját egy a hosszúságú intervallumban – felhasználhatjuk a grafikon pontjainak szerkesztésére a következő a hosszúságú intervallumban ($1/2 \leq y_0 < 1$ miatt elég a félkörnek csak a jobb oldali felét megrajzolni, 3. ábra).



3. ábra

Az $y_0 = f(x_0)$ függvényértéket átmásoljuk az x tengelyre az origón átmenő, 1 meredekségű e egyenes segítségével, ugyanis a grafikon $P_0(x_0, y_0)$ pontján átmenő, az x tengellyel párhuzamos egyenesnek e-vel való Q_0 metszéspontjához tartozó abszcissza is y_0; így k-nak a Q_0 abszcisszáján levő R_0 pontjához éppen az $y_1 = g(y_0) = f(x_0 + a)$ ordináta tartozik, tehát $f(x)$ grafikonjának az $x_0 + a$ abszcissza fölötti P_1 pontját kimetszhetjük az R_0-on át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenessel.

Hasonlóan kaptuk az $x_0 + 2a$ abszcissza fölötti P_2 pont $y_2 = f(x_0 + 2a) = f\left((x_0 + a) + a\right)$ ordinátáját P_1-bő] kiindulva, az ábra egymás után szerkesztett $Q_1(y_1, y_1)$, $R_1(y_1, y_2)$ pontjai útján. Így a feladat állítása abból következik, hogy a $Q_0R_0Q_1R_1$ négyszög négyzet – hiszen k szimmetrikus e-re –, és ezért $y_2 = y_0$, azaz $f(x_0 + 2a) = f(x_0)$.